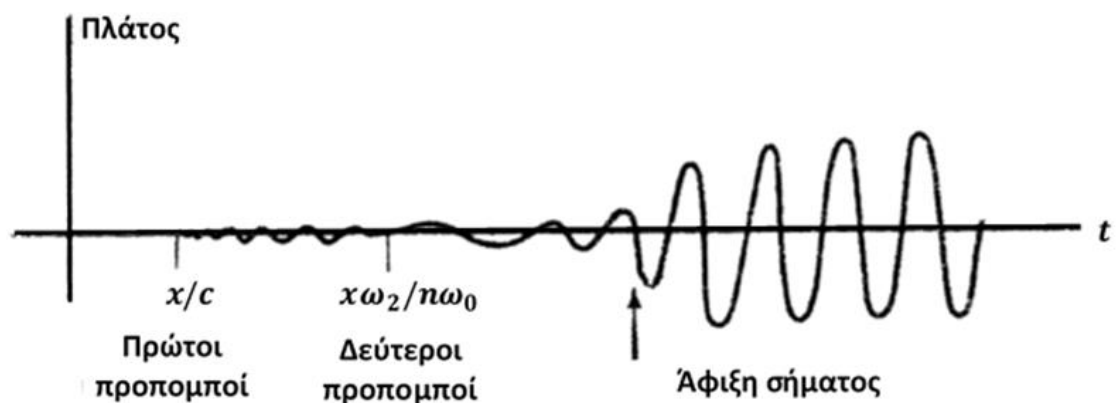


A. Sommerfeld & L. Brillouin

*Σχετικά με την διάδοση του φωτός
σε διασπείροντα μέσα*

*(Über die Fortpflanzung des Lichtes in
dispargierenden Medien)*



*Απόδοση στα Ελληνικά
Σωτήριος Βες*

Θεσσαλονίκη 2021

Εισαγωγικό σημείωμα

Στα επόμενα αποδίδονται στα Ελληνικά τα δύο πρώτα άρθρα με τον πανομοιότυπο τίτλο " Σχετικά με την διάδοση του φωτός σε διασπείροντα μέσα" (Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien) των A. Sommerfeld και L. Brillouin από την πρωτότυπη δημοσίευσή των στα Γερμανικά στο περιοδικό ANNALEN DER PHYSIK το 1914, σε δυο διαδοχικά άρθρα.

Η απόδοση έγινε διατηρώντας τόσο την εννοιολογία όσο και τη γλώσσα της εποχής. Η μόνη επέμβαση που έγινε στο αρχικό κείμενο είναι αλλαγή ορισμένων συμβόλων, ώστε να συμβαδίζουν με αυτά της σύγχρονης εποχής. Για παράδειγμα, αντί του συμβολισμού με n της κυκλικής συχνότητας που εμφανίζεται στα αρχικά κείμενα αυτός αντικαταστάθηκε με το ω όπως επίσης και δείκτης διαθλάσεως από μ αντικαταστάθηκε με το n .

Πιστεύω ότι τα δύο αυτά βασικά άρθρα θεμελιώνουν πολύ καλά τις έννοιες της ταχύτητες φάσεως, ομάδος και ενέργειας ως και την διαφοροποίησή των στη περιοχή απορρόφησης ή ταύτισή των εκτός αυτής. Επίσης εξηγούν απλά, με φυσικό τρόπο και κατανοητά την εμφάνιση και ερμηνεία των προπομπών στο πεδίο της χρονικής εξέλιξης της διάδοσης ενός αμφίπλευρα χρονικά περιορισμένου κυματοσυρμού. Επεξηγούν επίσης πολύ καλά το τι εννοούμε με τον όρο "διάδοση του φωτός" και ποιος ο ρόλος του μέσου στη δημιουργία και "διάδοση" των φωτεινών κυμάνσεων εντός ενός διασπείροντος μέσου.

Βέβαια σήμερα μπορεί κανείς να βρει μια πληθώρα σχετικών άρθρων, όμως η προσέγγιση του θέματος έχει γίνει μαθηματικά πολύ πιο απαιτητική και οι επιμέρους έννοιες δεν διευκρινίζονται επαρκώς και μάλιστα ορίζονται με διαφορετικό τρόπο. Παρακάτω παρατίθενται ορισμένα νεότερα άρθρα, που κάποιος θα πρέπει να έχει υπόψη του, αν θα ήθελε να εμβαθύνει στο θέμα, το οποίο αποτελεί και επίκαιρο ερευνητικό πεδίο.

1. Electromagnetic Wave Propagation in Dispersive and Complex Material with Time-Domain Techniques, Chapter 1.5.3 in Scattering, Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science 2002, Pages 277-294, Gerhard Kristensson, Anders Karlsson, StenRikte, Academic Press, <https://doi.org/10.1016/B978-012613760-6/50016-4>
2. Electromagnetic and Optical Pulse Propagation Volume 1: Spectral Representations in Temporally Dispersive Media. Kurt E. Oughstun. Springer Series in Optical Sciences, 2007
3. Electromagnetic and Optical Pulse Propagation Volume 2: Temporal Pulse Dynamics in Dispersive Attenuative Media. Kurt E. Oughstun. Springer Series in Optical Sciences, 2019.

4. On the Nature of the Sommerfeld-Brillouin Forerunners (or Precursors) P. K. Jakobsen and M. Mansuripur. Quantum Studies: Mathematics and Foundations (2019), doi:10.1007/s40509-019-00210-9].
5. Optical space-time wave packets having arbitrary group velocities in free space. Kondakci, H.E., Abouraddy, A.F. Nat Commun 10, 929 (2019). <https://doi.org/10.1038/s41467-019-08735-8>.
6. The velocity of energy through a dissipative medium. GEOPHYSICS, VOL. 75, NO. 2 共 MARCH-APRIL 2010 共; P. T37–T47, 7 FIGS.10.1190/1.3346064, DOI:10.1190/1.3346064
7. Precise definition of group velocity. W. V. Prestwich. I Am. J. Phys. Vol. 43, No. 9, September 1975.
8. The Velocities of Light. Richard L. Smith. American Journal of Physics 38, 978 (1970); doi: 10.1119/1.1976551.
9. Causality in Superluminal Pulse Propagation. Robert W. Boyd, Daniel J. Gauthier, and Paul Narum. Lect. Notes Phys. 789, 175–204 (2009). DOI 10.1007/978-3-642-03174-8 7.
10. Complex Wavenumber Rossby Wave Ray Tracing. JEFFREY SHAMAN, R. M. SAMELSON, ELI TZIPERMAN, JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES, 69,2112, 2012, DOI: 10.1175/JAS-D-11-0193.1
11. Negative Group Velocity. KT McDonald http://kirkmcd.princeton.edu/examples/optics/hau_nature_397_594_99.pdf.
12. Negative group velocity in solids. Kert Tamm, Tanel Peets, Jüri Engelbrecht, Dmitri Kartofelev. Wave Motion Volume 71, June 2017, Pages 127-138. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2016.04.010>.
13. New insight into light propagation and light-matter interactions with applications to experimental observations. Changbiao Wang. Optik Volume 204, February 2020, 163954. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.163954>

Πλατύστομο, Μάιος 2021

ANNALEN DER PHYSIK
VIERTE FOLGE: BAND 44.

1. Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien von A. Sommerfeld

ΧΡΟΝΙΚΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ ΕΚΔΟΣΗ ΤΟΜΟΣ 44

1. Σχετικά με την διάδοση του φωτός
σε διασπείροντα μέσα.
υπό A. Sommerfeld.
(απόδοση Σωτήριος Βες)

§1. Εισαγωγή και αποτελέσματα

Η παρούσα μελέτη, αποτελέσματα της οποίας έχω ήδη ανακοινώσει στη συνάντηση των Φυσικών στην Δρέσδη, αποτελεί μια επιτομή της διαπραγμάτευσης που είναι αφιερωμένη στα 70στά γενέθλια του Heinrich Weber. Αφορμή για την εκ νέου επεξεργασία της έδωσε η πρόσφατη μελέτη του κ. L. Brillouin, την οποία οι εδώ χρησιμοποιούμενες μέθοδοι (μικροσκοπικοί δρόμοι ολοκλήρωσης) επεκτείνουν έτι περαιτέρω.

Όταν στην επικεφαλίδα γίνεται λόγος για την ταχύτητα του "φωτός", θα πρέπει ευθύς εξ αρχής να τονισθεί ότι δεν θα ασχοληθούμε με το φυσικό φως (πολωμένο ή μη πολωμένο), δηλαδή το φως που προέρχεται από **πραγματικές** πηγές και που παράγεται με τη βοήθεια **πραγματικών** πολωτικών ή διασπειρόντων διατάξεων. Αυτό το φως αποτελείται πάντα από πολλούς κυματοσυρμούς, ελεγχόμενων μόνον ως προς την μέση των έντασης. Σε αντίθεση, ως βάση για το διαδιδόμενο φως, θα θεωρήσουμε μια ειδική, παντελώς καθορισμένη κατάσταση ταλαντώσεως, η οποία αποτελείται από μία πανομοιόμορφη μεταξύ των ακολουθία ημιτονικών ταλαντώσεων. Αν η ακολουθία εκτείνονταν απεριόριστα και από τις δύο πλευρές της, τότε θα ήταν παντελώς αδύνατος ο ορισμός, εν γένει, της έννοιας της ταχύτητας διαδόσεως. Και αυτό, γιατί σε μια άπειρη ημιτονική ακολουθία το μόνο χαρακτηριστικό της είναι η φάση. Συνεπώς, θα μπορούσαμε μόνο να αντιστοιχίσουμε τη φάση του διαδιδόμενου φωτός στην αντίστοιχη φάση σε ένα ορισμένο βάθος εντός του διασχιζόμενου μέσου. Με αυτό ερχόμαστε στην έννοια της **ταχύτητος φάσεως**, η οποία είναι το αποφασιστικό μέγεθος σε όλα τα φαινόμενα συμβολής, ουσιαστικά στην πλειονότητα των οπτικών φαινομένων. Αυτό που, συνήθως, με τον όρο "**ταχύτητα του φωτός**" σε ένα οπτικό μέσο καταλαβαίνει κανείς, είναι

η ταχύτητα του φωτός στο κενό c διαιρεμένη με τον δείκτη διαθλάσεως n^1 , η οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ταχύτητα φάσεως. Μόνο σε ένα οπτικά κενό μέσο (κενό, αέρας) η ταχύτητα φάσεως ισούται με τη ταχύτητα διαδόσεως. Σε κάθε άλλο μέσο, αυτή μας λέγει μόνο το πόσο καθυστερεί η φάση του φωτός λόγω της επιδράσεως του μέσου (βάσει της έως τώρα γνώσης μας εξαιτίας της εξαναγκασμένης ταλάντωσης των ιόντων και ηλεκτρονίων). Δεν μας λέγει όμως τίποτε για τη διαδικασία της διαδόσεως. Μάλιστα για έναν άπειρο κυματοσυρμό η διέγερση μέσω του φωτός όλων των μερών του μέσου ήδη προϋπάρχει στάσιμα, από άπειρο χρόνο.

Για να μπορέσουμε να πούμε κάτι σχετικά με τη διάδοση θα πρέπει να έχουμε έναν περιορισμένο κυματοσυρμό. Π.χ. ηρεμία μέχρι μία χρονική στιγμή και μετά μια ομοιόμορφη ακολουθία από ημιτονικές ταλαντώσεις, οι οποίες μετά από κάποιο χρόνο είτε παύουν είτε διαρκούν απεριόριστα. Έναν τέτοιο κυματοσυρμό θα τον ονομάζουμε "**σήμα**". Εδώ μπορεί κανείς να μιλήσει και για τη διάδοση της κεφαλής (ταχύτητα κεφαλής, ταχύτητα μετώπου). Μάλιστα αν έχουμε οπισθοκομμένο κυματοσυρμό μπορούμε να μιλάμε και για την ταχύτητα με την οποία το πέρασ του σήματος διαδίδεται εντός του μέσου. Το πέρασ του σήματος βέβαια δεν καθορίζεται όπως η κεφαλή η οποία διαχωρίζει μια περιοχή πλήρους ηρεμίας από μια περιοχή κινήσεων. Πολύ περισσότερο, το πέρασ του σήματος το ακολουθεί ένα μακρό (ουσιαστικά άπειρα μακρό) φαινόμενο αφηρέμησης, μέσω φθινόντων ταλαντώσεων των ιόντων. Παρόλα ταύτα, το πέρασ του σήματος χαρακτηρίζεται από το γεγονός, ότι στην εικόνα της εξέλιξης της κινήσεως δεν είναι τίποτε εμφανώς αναγνωρίσιμο, ενώ στην μαθηματική έκφραση από ότι η διεγείρουσα εξαναγκασμένη ταλάντωση σήματος εξαφανίζεται και παραμένουν μόνον οι φθίνουσες ελεύθερες ταλαντώσεις των ιόντων. Επειδή ένα περιορισμένο σήμα μπορούμε να το θεωρήσουμε ως υπέρθεση ενός απεριόριστα διαρκούντος κυματοσυρμού με έναν δεύτερο, επίσης άπειρης διάρκειας, ο οποίος να αρχίζει με τα πέρασ του σήματος αλλά με αντίθετη φάση, το οποίο, για τα επόμενα, αναιρεί τον πρώτο κυματοσυρμό. Συνεπώς η **ταχύτητα πέρατος** του πεπερασμένου σήματος είναι ταυτόσημη με την ταχύτητα κεφαλής ενός εισερχόμενου σήματος. Από την ταχύτητα κεφαλής, προφανώς, διαφοροποιείται η **ταχύτητα σήματος**, δηλαδή εκείνη η ταχύτητα με την οποία **διαδίδεται το κύριο τμήμα της κινήσεως του φωτός εντός του διασπείροντος μέσου**. Δηλαδή, συνάγεται ότι το σήμα κατά τη διάδοσή του στο μέσο επ' ουδενί διατηρεί την αρχική του μορφή, αλλά ότι σε ένα δεδομένο βάθος εντός του μέσου, κατ' αρχάς αφικνείται μια ασθενική κίνηση φωτός, οι "**προπομποί**", οι οποίοι σταδιακά αυξάνουν εντυπωσιακά σε αντίστοιχη ένταση. Το κύριο αποτέλεσμα της εργασίας του κ. Brillouin είναι, ότι αυτή η ταχύτητα σήματος πρακτικά συμπίπτει πάντα με την **ταχύτητα ομάδος**, όταν το προσπίπτον μήκος κύματος είναι διαφορετικό από τα ιδιοκύματα του διασπείροντος μέσου, δηλαδή όταν η κίνηση του φωτός διαδίδεται χωρίς ισχυρή απορρόφηση.

Αναφορικά με τη **ταχύτητα κεφαλής** θα δείξουμε ότι, σε όλες τις περιπτώσεις, αυτή είναι ταυτόσημη με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, c , ανεξάρτητα από το αν το μέσο

¹ Σημ. Μετ. Στο αρχικό κείμενο ο δ.δ. συμβολίζεται με μ . Για λόγους συμβατότητας με τους σύγχρονους συμβολισμούς έχει αλλαχθεί σε n .

εμφανίζει ομαλή ή ανώμαλη διασπορά, από το αν είναι διαφανές ή απορροφεί, από το αν είναι κανονικό ή διπλοθλαστικό. Η απόδειξη εδράζεται στη θεωρία διασποράς του φωτός, βάσει της οποίας οι οπτικές ιδιότητες ενός σώματος οφείλονται στην "συν-ταλάντωση" σωματιδίων, των ηλεκτρονίων ή ιόντων. Στα επόμενα αυτά τα σωματίδια θα τα χαρακτηρίζουμε ως ιόντα, ακόμη και αν θεωρούμε τη περίπτωση παρουσίας αποκλειστικά μόνον ηλεκτρονίων. Από την άποψη της αρχικής θεωρίας του Maxwell, με βάση την οποία η διηλεκτρική σταθερά ϵ και επομένως και ο δείκτης διαθλάσεως $n = \sqrt{\epsilon}$, είναι χαρακτηριστικές σταθερές του υλικού. Και η ταχύτητα φάσεως $V = c/\sqrt{\epsilon}$ είναι μια πραγματική ταχύτητα διαδόσεως των υπαρχόντων διαταραχών εντός του εν λόγω μέσου, ακριβώς όπως είναι η ταχύτητα c στο κενό. Βάσει των έως τώρα εμπειριών μας και τη σύνοψή των στην ηλεκτρονική θεωρία, υπάρχει μόνο ένα μοναδικό ισότροπο μέσο ηλεκτροδυναμικής δράσεως, το κενό, ενώ οι αποκλίσεις από τις ιδιότητες του οπτικού-κενού αποδίδονται στην συν-ταλάντωση φορτίων. Όταν η κεφαλή του σήματός μας διασχίζει το οπτικό μέσο, τα δυνατόν να εκτελέσουν ταλάντωση σωματίδια αρχικά βρίσκονταν σε ηρεμία (εκτός από τη θερμική κίνηση, η οποία ως ακανόνιστη κίνηση δεν έχει καμία επίδραση). Συνεπώς, κατ' αρχάς, το μέσο είναι προφανώς οπτικά κενό. Έτσι, μόνο μόλις από τη στιγμή που τα σωματίδια τεθούν σε κίνηση θα μπορούν να επηρεάσουν τη φάση και τη μορφή των ταλαντώσεων του φωτός. Όμως η διάδοση της κεφαλής του κυματοσυρμού παραμένει ανεπηρέαστη και ανεξάρτητη από τη φύση των διασπειρόντων ιόντων, ίση με τη ταχύτητα του κενού.

Από εδώ και πέρα, τα προκύπτοντα συμπεράσματα θα γίνουν άμεσα κατανοητά μέσω της μελέτης μας. Δυστυχώς, αυτά τα συμπεράσματα θα είναι εντελώς θεωρητικής φύσεως και μετά βίας συγκρίσιμα με το πείραμα εξαιτίας των πολύ μικρών ενεργειών που λαμβάνονται υπόψη ως και των πολύ μικρής διάρκειας απαιτούμενων χρόνων παρατήρησης. Επίσης, στις εκφράσεις της θεωρίας διασποράς θα κάνουμε μια κάπως πιο διευρυμένη εφαρμογή από ότι μπορεί να δικαιολογηθεί φυσικά. Δηλαδή, τις επεκτείνουμε σε οσοδήποτε μικρά μήκη κύματος, ενώ για την παραγωγή των απαιτήσαμε να ισχύουν για μήκη κύματος τα οποία να είναι μεγάλα σε σχέση με την απόσταση μεταξύ των διασπειρόντων σωματιδίων. Τα συμπεράσματά μας είναι:

Όταν αφήνουμε να προσπέσει λευκό φως κάθετα σε μια διασπείρουσα πλάκα, τα ολιγότερο διασπειρόμενα τμήματα (και επομένως τα "ταχύτερα") του λευκού φωτός δεν προσπερνούν τα ισχυρότερα διασπειρόμενα (τα "βραδυπορούντα") τμήματα και ότι το φως, τις πρώτες στιγμές της εξόδου από την πλάκα, δεν είναι χρωματισμένο κόκκινο. Πολύ περισσότερο, τα μέτωπα κύματος όλων των επιμέρους μερών του κινούνται εντός της πλάκας με την ίδια ταχύτητα c και ενεργειακά συνεισφέρουν εξ ίσου κατά τις πρώτες στιγμές εξόδου του φωτός. Αυτοί οι πρώτα εμφανιζόμενοι προπομποί δεν εμφανίζουν τα χρώματα των επιμέρους συνιστωσών από τις οποίες έχουν προκύψει, αλλά έχουν ένα καθορισμένο υπεριώδες μήκος κύματος, το οποίο προσδιορίζεται από το πάχος και την ικανότητα διασποράς της πλάκας, και είναι εξαιρετικά χαμηλής έντασης. Η μορφή της κινήσεως του φωτός κατά τη διέλευση μέσω της πλάκας αρχικά, ενόσω τα ιόντα τίθενται σε ταλάντωση, παραμορφώνεται τόσο δραματικά, ώστε να μην υφίσταται καμία ομοιότητα μεταξύ της μορφής του προσπίπτοντος φωτός και της αρχικά εξερχόμενης μορφής του φωτός. Επίσης κατακρατείται τόσο πολύ μεγάλο ποσό ενέργειας

για την αρχική επιτάχυνση των ιόντων, ώστε η αρχικά εξερχόμενη ενέργεια του φωτός να είναι εξαιρετικά χαμηλή σε σχέση με την προσπίπτουσα.

Ως άμεση διεύρυνση αυτών των αποτελεσμάτων μπορούμε να συνεχίσουμε: Αν το φως προσπίπτει πλάγια στην πλάκα τότε το φως αρχικά ούτε διαθλάται ούτε ανακλάται. Ο δείκτης διαθλάσεως αρχίζει να υφίσταται σταδιακά, συνάμα με τη δημιουργία των ταλαντώσεων των ιόντων, ενώ το μέτωπο του σήματος και οι μόλις προαναφερθέντες προπομποί μικρού μήκους κύματος, διασχίζουν την πλάκα χωρίς απόκλιση, ωσάν να υπήρχε μόνο αέρας. Περαιτέρω: Αν κάποιος τώρα αφήσει να προσπέσει ένα μη πολωμένο σήμα σε μια πλάκα από ασβεσίτη ή από χαλαζία, τότε αρχικά, αμέσως μετά την έξοδο, δεν θα παρατηρούσε γραμμικά ή κυκλικά πολωμένο φως, όπως θα περίμενε, αν πράγματι η "ταχύτερη" ακτίνα διαδιδόταν ταχύτερα από την "βραδεία". Πολύ περισσότερο, και εδώ η κρυσταλλική δομή, από οπτικής απόψεως, αρχικά δεν υφίσταται καν. Αυτή εμφανίζεται να δρα σταδιακά. Εξίσου λίγο, υφίσταται αρχικά και η διπλή διάθλαση.

Το αρχικό ενδιαφέρον του προβλήματός μας συνδέεται με τη θεωρία της σχετικότητας. Ως γνωστό, αυτή μας λέγει ότι ταχύτητες μεγαλύτερες της ταχύτητας του φωτός δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν, τόσο ως ταχύτητα μεταφοράς ενός κινούμενου ηλεκτρονίου ή σώματος όσο και ως ταχύτητα διαδόσεως ενός ηλεκτροδυναμικού ή μηχανικού σήματος². Ο W. Wien σημείωσε, ότι πλησίον της γραμμής απορροφήσεως ενός υλικού με φάσμα ανώμαλου διασκεδασμού μπορεί να υπάρχει μια περιοχή, όπου ο δείκτης διαθλάσεως είναι < 1 , δηλαδή η "ταχύτητα του φωτός" (ανεξάρτητα αν με αυτή κανείς εννοεί την ταχύτητα φάσεως ή την ταχύτητα ομάδος) είναι μεγαλύτερη του c . Αυτή η φαινομενική αντίφαση ως προς το σχετικιστικό αξίωμα θα πρέπει να διευκρινισθεί.

Αν με ω^3 συμβολίσουμε τη κυκλική συχνότητα του φωτός (αριθμός των ταλαντώσεων σε 2π μονάδες χρόνου), με k τον κυματάριθμο (αριθμός μηκών κύματος σε 2π μονάδες μήκους), με V την ταχύτητα φάσεως, με U την ταχύτητα ομάδος στη κυκλική συχνότητα ω και αν παραβλέψουμε την απορρόφηση, το οποίο προϋποθέτει ότι το k είναι πραγματικό, θα έχουμε:

$$V = \frac{\omega}{k}, \quad U = \frac{d\omega}{dk}$$

όπου για την ταχύτητα ομάδος θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$U = \frac{d(Vk)}{dk} = V + k \frac{dV}{dk} = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}$$

Για ανώμαλη διασπορά έχουμε $dV/d\lambda < 0$ και επομένως γίνεται $U > V$. Αν η V είναι ήδη μεγαλύτερη της c τότε θα οδηγούσε σε μια διάδοση του σήματος με ταχύτητα

² A. Einstein, Jahrbuch der Radioaktivität 4. p. 412. 1912. § 5; vgl. auch M. Laue, Phys. Zeitschr. 12. p. 48. 1911.

³ Σημ. Μετ. Στο αρχικό κείμενο η κυκλική συχνότητα συμβολίζεται με n . Για λόγους συμβατότητας με τους σύγχρονους συμβολισμούς έχει αλλαχθεί σε ω

ομάδος U μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός, πράγμα αδύνατο με βάση της θεωρία της σχετικότητας.

Στην πραγματικότητα όμως, βάσει των ήδη αναφερθέντων αποτελεσμάτων, δεν υφίσταται καθόλου καμία δυσκολία. Η κεφαλή (μέτωπο) του σήματος σε κάθε περίπτωση διαδίδεται με την ταχύτητα του κενού, c , ενώ το κύριο τμήμα της ενέργειας ακολουθεί με την αναγκαία μικρότερη, ταχύτητα σήματος. Αυτή, κατά τον Dr Brillouin, είναι αξιοσημείωτα, ίση με την ταχύτητα ομάδος έως και ακόμη και πλησίον της ταινίας απορρόφησης, την περιοχή του ανώμαλου διασκεδασμού. Εδώ, η ταχύτητα ομάδος χάνει τη σημασία της ως ταχύτητα σήματος. Οι μόλις προαναφερθείσες θεωρητικά "κατασκευασμένες" δυσκολίες προέρχονται από την υπερεκτίμηση της εννοίας της ταχύτητας ομάδος, εξαιτίας της ταχύτητας φάσεως να χαρακτηρίζεται συνήθως και ως "ταχύτητα του φωτός".

Εν συνεχεία, παραθέτουμε ορισμένες παρατηρήσεις σχετικά με την έννοια της ταχύτητας ομάδος. Όπως είναι γνωστό, μπορεί κανείς να δείξει με επιμέρους παραδείγματα⁴ ότι σε έναν παλμό αποτελούμενο από ένα σύνολο κυμάτων με γειτονικούς κυματάρθμους, ένα κυματόδεμα, ένα μέγιστο ή μια οιαδήποτε χαρακτηριστική τιμή του πλάτους δεν διαδίδεται με την ταχύτητα φάσεως V αλλά με την ταχύτητα ομάδος U . Πέραν αυτού ο M. Laue⁵ έδειξε, ότι στο φυσικό φως, δηλαδή στο τυχαίο, χαρακτηριζόμενο μόνο από τη μέση του ένταση ως προς το μήκος κύματος, η ταχύτητα ομάδος του είναι το αποφασιστικό μέγεθος για τη διάδοση της ενέργειας εντός του διασπείροντος μέσου. Συνάμα θα θεμελιωθεί ενδελεχώς, ότι στην ανώμαλη διασπορά, όπου εξαιτίας της ισχυρής απορρόφησης η έννοια της φυσικής ακτινοβολίας χάνει την ισχύ της μετά από διάδοση σε μικρή απόσταση, η ταχύτητα διάδοσης της εντάσεως δεν μπορεί να οριστεί επακριβώς. Σε περιπτώσεις, όπου η ταχύτητα ομάδος γίνεται $> c$ (ή πιθανώς και αρνητική), η ρήση της ισότητας της ταχύτητας ομάδος και ταχύτητας διαδόσεως υφίσταται μια εξαίρεση, καθόσον για *στατιστικά ορισμένο φως* δεν υφίσταται καμία επακριβώς οριζόμενη ταχύτητα διαδόσεως. Το ότι η διάδοση του μετώπου κύματος οφείλει, σε όλες τις περιπτώσεις, να γίνεται με ταχύτητα $\leq c$, συνάγεται από τη γενική θεώρηση της ηλεκτρονικής θεωρίας. Αυτό το αποτέλεσμα βρίσκεται επίσης σε συμφωνία με το συγκεκριμένο συναχθέν συμπέρασμά μας. Το αν η ταχύτητα ομάδος ακόμη και στα επιμέρους ανεξάρτητα φωτεινά σήματα, όπως εμείς τα θεωρούμε, εξακολουθεί να παίζει έναν ρόλο, η όλη θεώρηση του Laue δεν μπορεί να δώσει απάντηση. Όμως η εργασία του Dr Brillouin απαντά στο ερώτημα καταφατικά, βέβαια κάτω από τον ήδη αναγνωρισθέντα ως αναγκαίο περιορισμό, του αποκλεισμού της ταινίας απορροφήσεως.

Η παρούσα εργασία, στις §§ 2 και 3 δίδει τη γενική λύση του προβλήματος μέσω μιγαδικών ολοκληρωμάτων. Στην παραμορφωσιμότητα των δρόμων ολοκλήρωσης των

⁴ Βλέπε π.χ. A. Schuster, Einführung in die theoretische Optik, § 183. Το ότι τέτοια παραδείγματα δεν συνιστούν καμία γενική απόδειξη, παρουσιάσθηκε ήδη από τον P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 33. p. 1571. 1910. Αναφορικά με τη δυνατότητα αρνητικής ταχύτητας ομάδος πλησίον της ταινίας απορροφήσεως (1. c. von A. Sc h u s t e r), δείτε την άποψη του M. Laue παρακάτω στο κείμενο.

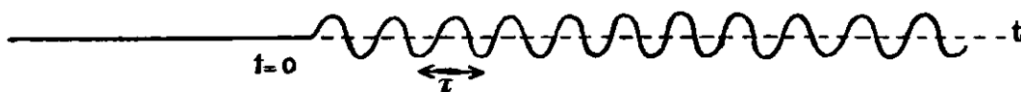
⁵ M. Laue, Ann. d. Phys. 18. p. 523. 1905, vgl. insbes. 9 6.

στηρίζεται η συζήτηση της λύσεως στην 4τη §. Επέκταση του δρόμου ολοκληρώσεως στο θετικό ημιεπίπεδο έως το άπειρο σημαίνει ότι επικρατεί ηρεμία. Προφανώς αυτό ισχύει για χρόνους $t < x/c$ ($x =$ διανυθέν βάθος εντός του διασπείροντος μέσου. Αντίθετα, για $t > x/c$ ο δρόμος θα πρέπει να τροποποιηθεί προς το αρνητικό ημιεπίπεδο έτσι να περατώνεται είτε σε έναν πόλο είτε στην τομή δύο διακλαδώσεων επί του επιπέδου. Το ότι το σύνορο μεταξύ των δύο περιπτώσεων κείται ακριβώς επί της ευθείας $t = x/c$ σημαίνει ότι το μέτωπο του κύματος (κεφαλή) διαδίδεται επακριβώς με την ταχύτητα του φωτός στο κενό c . Το υπόλοιπο στον πόλο δίδει μια χρονικά αμείωτη διέγερση από εκείνα τα μήκη κύματος της προσπίπτουσας ταλάντωσης οποίων το πλάτος και η φάση θα αντιστοιχούσαν σε μια αδιατάρακτη διάδοση αυτής της ταλάντωσης με τη ταχύτητα φάσεως V . Αυτό είναι το εξαναγκασμένο τμήμα της κινήσεως. Από την άλλη πλευρά, ο δρόμος περί την τομή δίδει μια χρονικά μειούμενη ταλάντωση, για την οποία αποφασιστικό ρόλο παίζουν η ιδιοσυχνότητα και η απώλειες στα ιόντα. Αυτό το τμήμα αντιστοιχεί σε ελεύθερες ταλαντώσεις των ιόντων, διεγερθείσες λόγω του σήματος. Όμως, ένας τέτοιος διαχωρισμός σε ελεύθερες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις είναι εφικτός μόνον για μεγάλες τιμές του $t - x/c$. Οι καταστάσεις για μικρές τιμές του $t - x/c$, δηλαδή για χρόνους αμέσως μετά την άφιξη του σήματος θα συζητηθούν στην § 6. Οι λεγόμενοι "προπομποί", που εμφανίζονται εδώ, δεν μπορούν να διαχωρισθούν από κανένα από τα δύο συνιστώντα επιμέρους τμήματα. Αυτοί είναι πολύ ασθενικές, μικρού μήκους κύματος ταλαντώσεις των οποίων η ισχύς και το μήκος κύματος αυξάνουν σταδιακά. Στην § 5 θα αποδειχθεί η μοναδικότητα της λύσεως του προβλήματος με βάση τη διατήρηση της ενέργειας, με ιδιαίτερη προσοχή στο γεγονός, ότι ναι μεν το μέτωπο κύματος του πεδίου είναι συνεχές, όμως η βάρθρωσή του είναι ασυνεχής.

§2. Το προσπίπτον σήμα

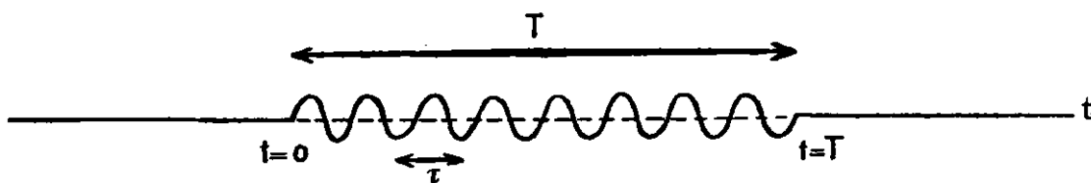
Το διασπείρον μέσο το θεωρούμε ότι εκτείνεται στον χώρο για $x > 0$, και ότι στο $x = 0$ ενώνεται με το κενό. Το κύμα προσπίπτει κάθετα, έτσι ώστε η οπτική κατάσταση να εξαρτάται μόνον από το x και t και έστω ότι για $x = 0$, δίδεται η εξάρτησή του από το t . Και επειδή δεν μας ενδιαφέρει το φαινόμενο της ανάκλασης στην επιφάνεια, έστω ότι η κατάστασή του αμέσως μετά την επιφάνεια, εντός του διασπείροντος μέσου είναι, $f(t)$. Η διαταραχή αρχίζει να δρα τη χρονική $t = 0$ και περιγράφεται είτε από το **Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.** είτε από την έκφραση (1.1)

$$(1.1) \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin \frac{2\pi t}{\tau} & t > 0 \end{cases}$$



Σχήμα 1-1

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τις εκφράσεις της θεωρίας της διασποράς θα συνθέσουμε την $f(t)$ από αρμονικές συνιστώσεις της μορφής $e^{i\omega t}$ ($\omega =$ συχνότητα). Αν προσπαθήσει να το κάνει κανείς μέσω των ολοκληρωμάτων Fourier πάνω σε πραγματικούς δρόμους, πέφτει πάνω σε δυσκολίες σύγκλισης. Αφού για $t \rightarrow \infty$ η συνάρτηση $f(t)$ δεν μηδενίζεται το ολοκλήρωμα Fourier δεν έχει κανένα νόημα. Αν όμως κανείς επιθυμεί να παραμείνει στη συνήθη πραγματική παράσταση των ολοκληρωμάτων Fourier θα πρέπει να θεωρήσει έναν κυματοσυρμό περατωμένο και από τις δύο πλευρές. Δηλαδή, $f(t) = 0$ για $t < 0$ και $t > T$, βλέπε Σχήμα 1-2.



Σχήμα 1-2

Ένας τέτοιος κυματοσυρμός απαρτίζεται από δύο κυματοσυρμούς της μορφής που θεωρήσαμε προηγουμένως. Έναν που να αρχίζει για $t = 0$ και έναν που να αρχίζει για $t = T$, με αντίθετη φάση, έτσι ώστε και οι δύο να αναιρούνται για κάθε χρονική στιγμή $t > T$.

Για τον αμφίπλευρα περατωμένο κυματοσυρμό για το ανάπτυγμα Fourier θα έχουμε:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_0^T \sin 2\pi \frac{\alpha}{\tau} \cos \omega(t - \alpha) d\alpha$$

$$= \int_0^{\infty} d\omega \left[\frac{\cos \left(2\pi \frac{\alpha}{\tau} + \omega(t - \alpha) \right)}{\omega - 2\pi / \tau} - \frac{\cos \left(2\pi \frac{\alpha}{\tau} - \omega(t - \alpha) \right)}{\omega + 2\pi / \tau} \right]_{\alpha=0}^{\alpha=T}$$

Αν στο Σχήμα 1-2 θεωρήσουμε

$$(1.2) \quad T = N\tau$$

δηλαδή ίσο με ένα πολλαπλάσιο του τ , τότε η ως άνω παράσταση απλοποιείται στην

$$f(t) = \frac{2}{\tau} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - (2\pi / \tau)^2} (\cos \omega(t - T) - \cos \omega t)$$

Για τη συζήτηση στον πραγματικό χώρο συνιστάται ο ακόλουθος μετασχηματισμός της

$$(1.3) \quad f(t) = \frac{4}{\tau} \int_0^{\infty} d\omega \sin \omega \left(t - \frac{T}{2} \right) \frac{\sin \omega T / 2}{\omega^2 - (2\pi / \tau)^2}$$

Αντίθετα για την μιγαδική θεώρηση ο

$$(1.4) \quad f(t) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 - (2\pi / \tau)^2} \left(e^{-i\omega(t-T)} - e^{-i\omega t} \right)$$

ή επίσης⁶

$$(1.5) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \Re \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega - 2\pi / \tau} \left(e^{-i\omega(t-T)} - e^{-i\omega t} \right)$$

όπου το \Re υποδηλώνει το πραγματικό μέρος της εκφράσεως. Η εξίσωση (1.3) μας δίδει την φασματική ανάλυση του αμφίπλευρα περατωμένου μας κυματοσυρμού σε μια βάση από άπειρης διάρκειας κύματα. Ο παράγοντας του $\sin \omega(t - T/2)$ υποδηλώνει τα πλάτη των επιμέρους κυμάτων και το τετράγωνό του την αντίστοιχη ειδική έντασή των (ένταση ανά μονάδα συχνότητας).

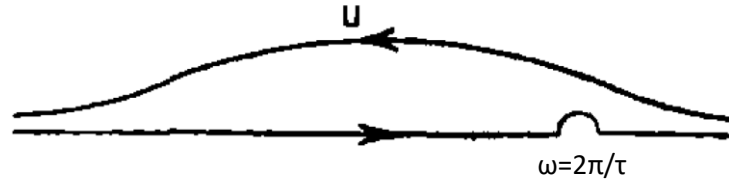
$$(1.6) \quad J = \left(\frac{4}{\tau} \frac{\sin \omega T / 2}{\omega^2 - (2\pi / \tau)^2} \right)^2$$

Αυτή επιβεβαιώνει, ότι κάθε επιμέρους κύμα, ακόμη και το προτιμητέο στη συχνότητα $\omega = 2\pi/\tau$, έχει πεπερασμένη ένταση. Ο μηδενισμός του παρονομαστού για $\omega = 2\pi/\tau$ απλοποιείται με τον ταυτόχρονο μηδενισμό του αριθμητή $\sin \omega T / 2 = \sin N\pi$ (εξίσωση (1.2)). Από το πηλίκιο των δύο προκύπτει

$$(1.7) \quad J_{\max} = \left(\frac{N\tau}{2\pi} \right)^2$$

Για την έκφραση (1.5) συνάγεται ότι στη θέση $\omega = 2\pi/\tau$ αυτή η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν απειρίζεται εφόσον οι δύο εκθετικές συναρτήσεις δεν διαχωρίζονται. Συνεπώς η ολοκλήρωση ως προς τον πραγματικό άξονα, σε αυτή τη θέση, μπορεί να αντικατασταθεί από μια μικρή ημιπεριφέρεια στο επάνω μιγαδικό επίπεδο. Μόλις το κάνουμε αυτό, ο δρόμος ολοκληρώσεως μπορεί να τροποποιηθεί έτι περισσότερο (βλέπε Σχήμα 1-3) και οι δύο εκθετικές συναρτήσεις στη σχέση (1.5) μπορούν να ολοκληρωθούν κατά μόνας.

⁶ Το ότι η (1.4) και η (1.5) είναι ταυτόσημες μπορεί να το δείξει κανείς με τον ίδιο τρόπο όπως στην § 4 για την ταυτότητα των (1.9α) και (1.9β) με την (1.9)



Σχήμα 1-3

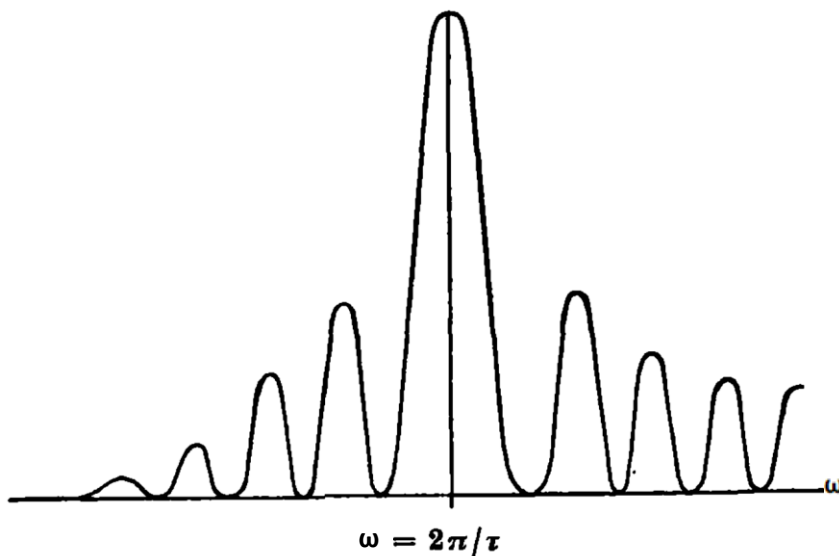
$$(1.8) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{R} \int \frac{d\omega}{\omega - 2\pi/\tau} e^{-i\omega t} - \frac{1}{2\pi} \mathfrak{R} \int \frac{d\omega}{\omega - 2\pi/\tau} e^{-i\omega(t-T)}$$

Όπου ως δρόμος ολοκλήρωσης θεωρείται ο δρόμος u (από $+\infty$ έως $-\infty$, βλέπε Σχήμα 1-3), ο οποίος έχει την αντίθετη φορά από ότι το ολοκλήρωμα Fourier και γιαυτό η αντιστροφή προσήμων στο δεξιό μέρος της τελευταίας εξισώσεως. Προφανώς, ο τρόπος γραφής της εξισώσεως (1.8) αντιστοιχεί στη διάσπαση του αμφίπλευρα περατωμένου κυματοσυρμού σε δύο, καθενός μονόπλευρα περατωμένων (στο $t = 0$ και $t = T$), σημάτων. Αυτή η διάσπαση ήταν αδύνατη αν χρησιμοποιούσαμε τον πραγματικό δρόμο ολοκλήρωσης.

Προτού μελετήσουμε περαιτέρω τις ιδιότητες των μονόπλευρα περατωμένων σημάτων, ως συνέχεια της εξισώσεως (1.6), ας σχεδιάσουμε το "φάσμα" του αμφίπλευρα περατωμένου κυματοσυρμού. Η ένταση μηδενίζεται, βάσει της (1.6), στις θέσεις

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \frac{4\pi}{T}, \quad \frac{6\pi}{T}, \dots$$

και, σχεδόν στο μέσο, μεταξύ δύο τέτοιων θέσεων εμφανίζει ένα δευτερεύον μέγιστο. Μια εξαίρεση αποτελεί η θέση

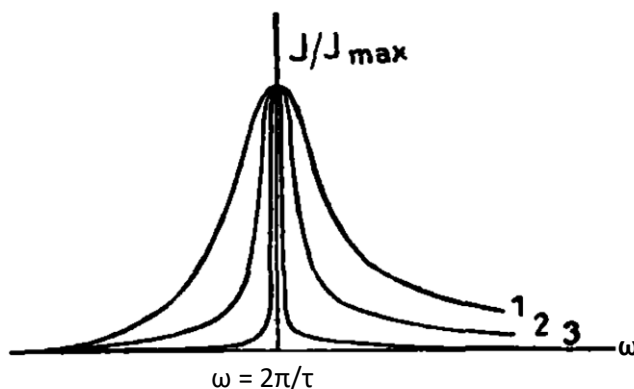


Σχήμα 1-4

$$\omega = \frac{2\pi N}{T} = \frac{2\pi}{\tau} \quad (\text{βλέπε εξίσωση (2)})$$

η οποία δεν είναι θέση μηδενισμού αλλά θέση εμφανίσεως του κυρίου μεγίστου, με τιμή αυτή της εξισώσεως (1.7). Συνεπώς η γραφική παράσταση (σχηματικά απεικονίζεται στο Σχήμα 1-4), αποτελείται από άπειρα τόξα, εύρους $2\pi/T$, αρχικά αυξανόμενου και εν συνεχεία μειούμενου ύψους. Μόνο στη χαρακτηριστική θέση $\omega = 2\pi/\tau$ τα δύο διαδοχικά τόξα συγχωνεύονται σε ένα διπλάσιου εύρους και πολύ μεγαλύτερου ύψους, το οποίο βάσει της εξισώσεως (1.7) αυξάνεται με το N , δηλαδή με αυξανόμενο μήκος του σήματος.

Αν εξομαλύνουμε την καμπύλη της εντάσεως, σχεδιάζοντας αντί τα επιμέρους τόξα την περιβάλλουσα με τεταγμένη το μέγεθος J/J_{max} προκύπτουν, επίσης σχηματικά, οι καμπύλες 1, 2, 3, ... στο Σχήμα 1-5, οι οποίες, κατ' αύξουσα σειρά, αντιστοιχούν σε αυξανόμενες τιμές του T , αντίστοιχα του N (βλέπε εξίσωση (1.2)). Από το σχήμα βλέπουμε ότι, σταδιακά, το αρχικά ευρύ φάσμα προσεγγίζει εκείνο μιας στενής φασματικής γραμμής στη συχνότητα $\omega = 2\pi/\tau$, όπως και θα αναμενόταν.



Σχήμα 1-5

Φυσικά, η εξομαλυμένη καμπύλη της εντάσεως είναι δυνατόν να μην αναπαριστά την χρονική εξέλιξη του προϋποτιθέμενου αμφίπλευρα περατωμένου σήματος. Αυτή, πολύ περισσότερο, αντιστοιχεί σε μια **χρονικά αμφίπλευρα απεριόριστη φωτεινή διέγερση** και η οποία, περισσότερο ή λιγότερο, εκφράζει τον μονοχρωματικό χαρακτήρα της (με αυξανόμενο/μειούμενο μήκος κυματοσυρμού). Αντίθετα, το αρχικό μας φάσμα στο Σχήμα 1-4 είναι μια επακριβώς ισοδυναμία του αμφίπλευρα περατωμένου σήματός μας. Αυτό σημαίνει: Αν αναμείξει κανείς απόλυτα αρμονικούς περιοδικούς κυματοσυρμούς και αν σε κάθε έναν κυματοσυρμό συχνότητας ω (διαφορετική) προσάψει τη υπολογισμένη μορφή φασματική εντάσεως J , τη φάση που εμπεριέχεται στην εξίσωση (1.3) και τέλος φέρει όλους αυτούς του κυματοσυρμούς σε επικάλυψη για χρόνους από $+\infty$ έως $-\infty$, δεν θα προκύψει ένας χρονικά απεριόριστος κυματοσυρμός, αλλά ένας αμφίπλευρα περατωμένος, χαρακτηριστικής συχνότητας $2\pi/\tau$. Προφανώς, και είναι οι μεγάλες και ταχείες διακυμάνσεις που εμπεριέχονται στο Σχήμα 1-4 αυτές που καθι-

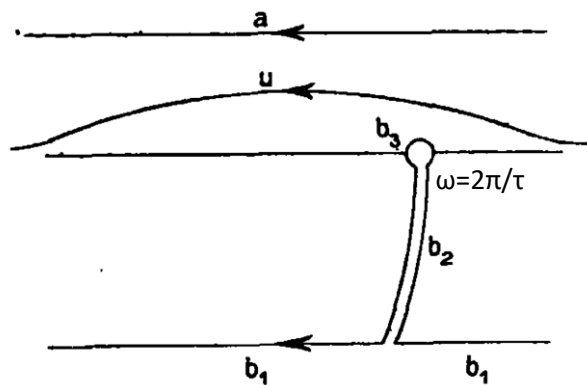
στούν ουσιαστικά δυνατή την επακριβή αναπαραγωγή της χρονικής μεταβολής του σήματος.

§3. Η γενική λύση του προβλήματος

Το πρώτο ολοκλήρωμα στην εξίσωση (1.8) παριστά το σήμα που εμφανίζεται για χρόνο $t = 0$ και διαρκεί έως $t = \infty$ και το οποίο παριστάνεται στο **Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.**, όπου η ολοκλήρωση έγινε κατά μήκος του δρόμου u , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-6:

$$(1.9) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \Re \int e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{\omega - 2\pi/\tau}$$

Αν και αυτό, ήδη στις προηγούμενες παραγράφους, αποδείχθηκε με βάση τα ολοκληρώματα Fourier, θα θέλαμε να το επιβεβαιώσουμε ακόμη μια φορά μέσω μιας διαδικασίας, την οποία έτσι και αλλιώς θα την χρειαστούμε για την επόμενη συζήτησή μας. Έτσι, αντικαθιστούμε τον αρχικό δρόμο ολοκλήρωσης u από δύο ισοδύναμους δρόμους.



Σχήμα 1-6

α) $t < 0$. Σε αυτή τη περίπτωση το $-i\omega t$ έχει στο **πάνω** ημιεπίπεδο ένα αρνητικό πραγματικό τμήμα, το οποίο με αυξανόμενη απόσταση από τον πραγματικό άξονα αυξάνει απεριόριστα. Συνεπώς, μπορεί κανείς να αντικαταστήσει τον αρχικό δρόμο ολοκλήρωσης u με τον δρόμο a (Σχήμα 1-6). Το ολοκλήρωμα μηδενίζεται κατά μήκος αυτού του δρόμου αν κανείς θεωρήσει ότι το a στο πάνω ημιεπίπεδο τείνει στο άπειρο. Οπότε

$$(1.10) \quad f(t) = 0 \quad (t < 0)$$

β) $t > 0$. Τώρα, το $-i\omega t$ έχει στο **κάτω** ημιεπίπεδο ένα αρνητικό πραγματικό μέρος, έτσι ώστε η εκθετική συνάρτηση να μηδενίζεται στο άπειρο αυτού του ημιεπιπέδου. Αν λοιπόν παραμορφώσει κανείς τον δρόμο u στο κάτω ημιεπίπεδο έως το άπειρο παραμένει μόνο ο πόλος της ολοκληρωτέας συνάρτησης στη θέση $\omega = 2\pi/\tau$ (Σχήμα 1-6). Συνεπώς ο δρόμος ολοκλήρωσης b αποτελείται από τριών ειδών τμήματα. Τα στο άπειρο βρισκόμενα τμήματα b_1 στα οποία το ολοκλήρωμα μηδενίζεται λόγω του παράγοντα $e^{-i\omega t}$. Τα δύο οδηγούντα στο άπειρο τμήματα b_2 τα οποία αλληλοαναιρούνται αμοιβαία και συνεπώς δεν συνεισφέρουν τίποτε στο ολοκλήρωμα. Τέλος ο δρόμος b_3 περί τον πόλο. Η συνεισφορά του τελευταίου μπορεί να υπολογισθεί άμεσα με το θεώρημα του Cauchy:

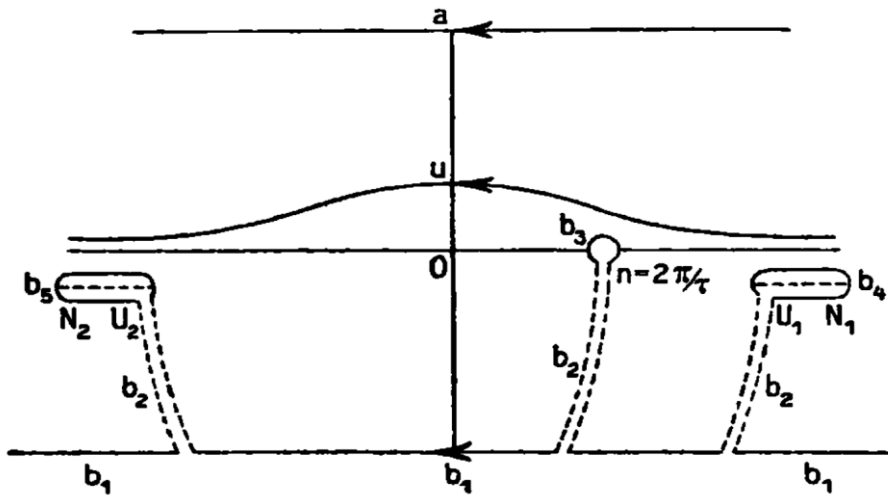
$$(1.11) \quad b_3 = \frac{1}{2\pi} \Re \left\{ i2\pi e^{-i\frac{2\pi t}{\tau}} \right\} = \sin \frac{2\pi t}{\tau} \quad (t > 0)$$

Με το παραπάνω αποδείχθηκε, ότι η έκφραση (1.9) πράγματι περιγράφει το φωτεινό κύμα που αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ και που ορίζεται από τις συνθήκες (1.1).

Η γενική λύση του προβλήματός μας, λοιπόν, μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$(1.12) \quad f(t, x) = \frac{1}{2\pi} \Re \int e^{-i\omega t + ikx} \frac{d\omega}{\omega - 2\pi/\tau}$$

όπου ο δρόμος ολοκληρώσεως u εκτείνεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 1-6 ή στο Σχήμα 1-7.



Σχήμα 1-7

Όμως, η θεωρία διασποράς μας λέει, ότι μια χρονικά απεριόριστη διαταραχή $e^{-i\omega t}$ στη θέση $x = 0$ μετά τη διάδοσή της κατά μία απόσταση x εντός ενός διασπείροντος μέσου αυτή παίρνει τη μορφή επιπέδου κύματος $e^{-i\omega t + ikx}$, υπό την προϋπόθεση ότι το k ορίζεται από την

$$(1.13) \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - 2i\omega\gamma - \omega^2} \right)$$

με την συντόμευση $a^2 = Ne^2/m$.⁷

Τα σύμβολα $N, e, \omega_0, \gamma, m$ σημαίνουν αντίστοιχα την αριθμητική πυκνότητα ανά κυβικό εκατοστόμετρο, το φορτίο, την ιδιοσυχνότητα, τη σταθερά απόσβεσης και τη μάζα των ταλαντούμενων σωματιδίων. Όλες τις παραπάνω ποσότητες θα πρέπει να τις

⁷ Στο αρχικό κείμενο χρησιμοποιούνταν αντίστοιχα τα σύμβολα \mathfrak{N} (N αρχαιοπρεπές γερμανικό) και ρ στη θέση των N και γ .

εφοδιάσουμε με δείκτες, αν έχουμε διαφορετικά είδη ταλαντούμενων σωματιδίων και να αθροίσουμε σε όλους τους δείκτες. Και επειδή ουσιαστικά δεν αλλάζει τίποτε αν έχουμε περισσότερα είδη θα περιοριστούμε στην απλή έκφραση (1.13).

Το ότι δεν υπάρχει άλλη λύση εκτός από την (1.12) θα αποδειχθεί στην §5.

§4. Συζήτηση της αποκτηθείσας λύσεως

Συνεχίζοντας στο πνεύμα της προηγηθείσας συζήτησης σχετικά με την $f(t)$, έστω ότι

$$\dagger = t - \frac{x}{c}$$

Θα θεωρήσουμε τις δύο περιπτώσεις a) $\dagger < 0$ και b) $\dagger > 0$ και ισχυριζόμαστε ότι το $\dagger = 0$ σημαίνει την άφιξη του σήματος σε βάθος x .

a) $\dagger < 0$. Παραμορφώνουμε τον δρόμο u στο Σχήμα 1-6 ή στο Σχήμα 1-7 στο δρόμο a . Αυτό είναι επιτρεπτό μόνον όσο το πραγματικό μέρος του $-\omega t + kx$ στο άπειρο του πάνω ημιεπιπέδου γίνεται αρνητικό. Για $\omega = \infty$, με βάση την (1.6) $k = \omega/c$ και επομένως

$$-i\omega t + ikx = -i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = -i\omega \dagger$$

Η μετάβαση λοιπόν στον δρόμο a είναι επιτρεπτή για $\dagger < 0$. Όμως τότε μηδενίζεται το ολοκλήρωμά μας. Συνεπώς θα έχουμε:

$$(1.14) \quad f(t, x) = 0 \quad \dagger < 0$$

b) $\dagger > 0$. Παραμορφώνουμε τον δρόμο u προς το κάτω ημιεπίπεδο, επειδή τώρα στο άπειρο το $-i\omega t + ikx = -i\omega \dagger$ έχει αρνητικό πραγματικό μέρος. Ο δρόμος ολοκλήρωσης δεν παρακάμπει μόνον του πόλους του παρονομαστή στις θέσεις $\omega = 2\pi/\tau$, αλλά και τα σημεία διακλαδώσεως των εκφράσεων του k . Τα τελευταία προκύπτουν από την (1.13), αν θέσει κανείς $k = \infty$ και $k = 0$

$$(1.13a) \quad \begin{aligned} k = \infty \quad \alpha \nu \quad \omega^2 + 2i\omega\gamma = \omega_0^2 \\ \omega = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \end{aligned}$$

$$(1.13b) \quad \begin{aligned} k = 0 \quad \alpha \nu \quad \omega^2 + 2i\omega\gamma = \omega_0^2 + a^2 \\ \text{δηλ. } \alpha \nu \quad \omega = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - a^2 + \gamma^2} \end{aligned}$$

Δηλαδή, τα σημεία διακλαδώσεως κείνται στο κάτω ημιεπίπεδο συμμετρικά ως προς τον μιγαδικό άξονα. Στο Σχήμα 1-7, τα δύο πρώτα ($k = \infty$) συμβολίζονται με U_1, U_2 και τα δύο τελευταία με N_1, N_2 . Οι φανταστικές τιμές των αντιστοίχων ω είναι $-\gamma$, ενώ οι πραγματικές τιμές των (για μικρά γ και a) ισούνται ουσιαστικά με την ιδιοσυχνότητα των ηλεκτρονίων. Τα σημεία διακλαδώσεως που απεικονίζονται στο Σχήμα 1-7 ($\omega_0 > 2\pi/\tau$) αντιστοιχούν σε απορρόφηση στο υπερίωδες, αν η συχνότητα του προσπίπτο-

ντος κύματος $2\pi/\tau$ βρίσκεται στο ορατό. Συνδέουμε τα σημεία διακλαδώσεως U_1, N_1 , όπως και τα U_2, N_2 , με κλάδους διακλαδώσεως.

Ο δρόμος ολοκληρώσεως b διασπάται στα επιμέρους τμήματά του b_1, b_3, b_4, b_5 , καθόσον, από την αρχή, μπορούμε, ως αμοιβαία αναιρούμενους, να παραβλέψουμε τους με στικτές γραμμές σχεδιασμένους b_2 δρόμους. Η συνεισφορά του δρόμου b_1 μηδενίζεται εξαιτίας της μεγάλης αρνητικής τιμής του πραγματικού μέρους $-i\omega t$. Η τιμή του b_3 μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια του θεωρήματος των υπολοίπων,

$$(1.15) \quad b_3 = \frac{1}{2\pi} \Re \left\{ i2\pi e^{-i\frac{2\pi t}{\tau} + ik_\tau x} \right\}$$

Εδώ το k_τ σημαίνει εκείνη την τιμή του k , η οποία προκύπτει από την (1.13) για $\omega = 2\pi/\tau$, δηλ.

$$(1.16) \quad k_\tau = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + i\kappa) \quad e^{ik_\tau x} = e^{\frac{2\pi\kappa x}{\lambda}} \cdot e^{-i\frac{2\pi x}{\lambda}}$$

δηλαδή θέτομε ως λ εκείνη την απόσταση στην x στην οποία η φάση αναπαράγεται και το κ ίσο με την λογαριθμική μείωση του πλάτους του διαδιδόμενου κύματος αν διανύσει απόσταση ίση με το μήκος κύματος.

Από την (1.15) προκύπτει

$$(1.17) \quad b_3 = e^{-2\pi\kappa\frac{x}{\lambda}} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Τα ολοκληρώματα b_4 και b_5 δεν μπορούν να απλοποιηθούν περαιτέρω. Γράφομε

$$(1.18) \quad B = b_4 + b_5 = \frac{1}{2\pi} \left(\int \right) e^{-i\omega t + ikx} \cdot \frac{d\omega}{\omega - 2\pi/\tau}$$

στην οποία οι παρενθέσεις περί το ολοκλήρωμα υποδηλώνουν το δρόμο γύρω από τους δύο δρόμους διακλαδώσεως. Συνεπώς, συνολικά θα έχομε

$$(1.19) \quad f(t, x) = e^{-2\pi\kappa\frac{x}{\lambda}} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) + B \quad \text{για } t > 0$$

c) $t = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε, τόσο πάνω όσο και στο κάτω ημιεπίπεδο, να παραμορφώσουμε τον δρόμο ολοκληρώσεως άμεσα έως το άπειρο, καθόσον στο άπειρο και οι δύο ολοκληρωτέες ποσότητες μηδενίζονται. Όχι όμως εκθετικά λόγω του παράγοντα $e^{-i\omega t + ikx}$ ο οποίος τώρα ισούται $e^{-i\omega t} = 1$, αλλά ως $1/\omega^2$.

Αυτό φαίνεται αμέσως αν στην εξίσωση (1.9) πάρει κανείς το πραγματικό μέρος, θα έχει

$$(1.9a) \quad f(t) = \frac{1}{4\pi} \left(\int \frac{d\omega}{\omega - 2\pi/\tau} e^{-i\omega t} + \int \frac{d\omega}{\omega - 2\pi/\tau} e^{+i\omega t} \right)$$

και αντικαθιστώντας στο δεύτερο ολοκλήρωμα το ω με $-\omega$ παίρνουμε

$$(1.9b) \quad f(t) = \frac{1}{\tau} \left(\int \frac{d\omega}{\omega^2 - (2\pi/\tau)^2} e^{-i\omega t} \right)$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε τη θεωρία διασποράς από την (9b) προκύπτει, όπως ακριβώς προέκυψε και η (1.9) από την (1.12),

$$(1.12a) \quad f(t, x) = \frac{1}{\tau} \left(\int e^{-i\omega t + ikx} \frac{d\omega}{\omega^2 - (2\pi/\tau)^2} \right)$$

Εδώ, η ολοκληρωτέα συνάρτηση, για μεγάλα συμπεριφέρεται ω συμπεριφέρεται όπως το $e^{-i\omega t}/\omega^2$, δηλαδή για $t = 0$ πράγματι φθίνει όπως το $1/\omega^2$.

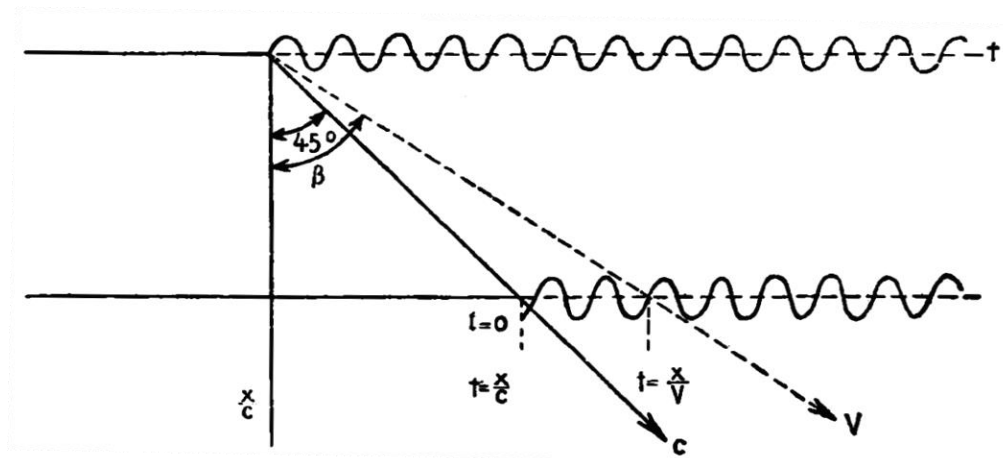
Επειδή υπολογίζουμε την $f(t, x)$ τη μια φορά στο δρόμο a) και την άλλη φορά στον δρόμο b) βλέπουμε ότι ισχύει

$$(1.20) \quad 0 = e^{-\frac{2\pi kx}{\lambda}} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) + B \quad \text{για } t=0$$

το οποίο και εγγυάται τη συνέχεια των "εποχών", $t < 0$ και $t > 0$

Συνοψίζοντας, η συνολική εξέλιξη του σήματος σε βάθος $x < 0$ προκύπτει όπως αυτή στο Σχήμα 1-8.

a) Μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 0$ επικρατεί ηρεμία. Ακόμη και αν η ταχύτητα φάσεως $V > c$, δεν μπορεί να αφιχθεί νωρίτερα καμία οπτική δράση από ότι αντιστοιχεί



Σχήμα 1-8

στην ταχύτητα διαδόσεως c . Αν στο Σχήμα 1-8 σχεδιάσουμε ως κάθετη συντεταγμένη το x/c , στην ταχύτητα διαδόσεως c αντιστοιχεί μια ευθεία με κλίση 45° , η οποία τέμνει την ευθεία σε βάθος x την χρονική στιγμή $t = 0$, που είναι η στιγμή που αρχίζει η διέγερση της φωτεινής διέγερσης. Αν τώρα θεωρήσουμε κανονική διασπορά και συνεπώς $V < c$, και σχεδιάσουμε τη σικτική ευθεία γραμμή υπό γωνία $\tan\beta = V/c$, τότε, παρομοίως, και αυτή θα δίδει εκείνες τις χρονικές στιγμές, οι οποίες αντιστοιχούν σε διάδοση με ταχύτητα V . Στην πραγματικότητα, η ταχύτητα V δεν έχει να κάνει τίποτε με την ταχύτητα διαδόσεως. Απλά προσδιορίζει την κατανομή των φάσεων, και μάλιστα αυστηρά θεωρούμενο, μόνον αυτών σε έναν χρονικά απεριόριστο κυματοσυρμό.

b) Η κίνηση του κύματος για $t > 0$ αποτελείται από δύο μέρη, τα οποία μπορούν να διακριθούν, ως ελεύθερες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Το πρώτο δίδεται από το μέρος B (εξίσωση (1.18)) και το δεύτερο (βλέπε εξίσωση (1.19)) από την

$$e^{-\frac{2\pi kx}{\lambda}} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) = e^{-\frac{2\pi kx}{\lambda}} \cdot \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{x}{V} \right)$$

Η εξαναγκασμένη ταλάντωση (βλέπε Σχήμα 1-8) είναι χρονικά αμείωτη και έχει τον συνήθη ημιτονοειδή χαρακτήρα, όπως το προσπίπτον κύμα. Μόνο το πλάτος φθίνει λόγω του συντελεστή εξασθένισης. Η μείωση αυτή παραλείφθηκε στο Σχήμα 1-8. Η φάση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης την κατασκευάζουμε μετατοπίζοντας το μέτωπο του προσπίπτοντος κύματος τη χρονική στιγμή $t = x/V$ (τομή των σικτικών γραμμών) και αυτή με τη σειρά της καθορίζει τη φάση που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t = x/c$. Πράγματι, ουσιαστικά η εξίσωση (1.19) ισχύει από αυτή τη χρονική στιγμή $t = 0$ και επομένως, η εξαναγκασμένη ταλάντωση ουσιαστικά δεν αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = x/V$. Το Σχήμα 1-8 μας δείχνει γραφικά ότι η μεν ταχύτητα V καθορίζει τη φάση και η δε ταχύτητα c τη διάδοση.

Στη περίπτωση της ανώμαλης διασποράς, $V > c$, η σικτική καμπύλη θα έτεμνε τον οριζόντιο άξονα πριν από τη χρονική στιγμή $t = x/c$. Η φάση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα έπρεπε να κατασκευασθεί πάλι από αυτό το σημείο τομής. Όμως η ταλάντωση θα αρχίζει μόνο από τη χρονική στιγμή $t = x/c$.

Η ελεύθερη ταλάντωση (δεν απεικονίζεται στο Σχήμα 1-8) είναι χρονικά μειούμενη, καθόσον στην έκφρασή της B , ο χρόνος t εμφανίζεται ως γινόμενο με τη μιγαδική συχνότητα ω , της οποίας το φανταστικό μέρος βάσει των εξισώσεων (13a, b) ισούται με τη σταθερά απόσβεσης γ των ταλαντούμενων ιόντων, αν κανείς θεωρήσει ως δρόμο ολοκληρώσεως του B (όπως είναι επιτρεπτό και απεικονίζεται στο Σχήμα 1-7) πολύ κοντά περί τα σημεία διακλαδώσεως U_1, N_1, U_2, N_2 . Παρομοίως λοιπόν, και η ελεύθερη ταλάντωση αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = x/c$. Αυτό οφείλεται στο ότι τα ιόντα πρέπει πρώτα να τεθούν σε κίνηση και αυτό παίρνει κάποιο χρόνο, ανάλογα με την αδράνειά (μάζα) των και τις ελαστικές δυνάμεις των, ώστε σταδιακά να προσαρμοσθούν στην εισερχόμενη κύμανση. Με αυξανόμενο χρόνο μηδενίζεται η ελεύθερη ταλάντωση και παραμένει μόνο η εξαναγκασμένη (διαμορφωμένη από ταλαντούμενα ιόντα) ταλάντωση.

c) Για $t = 0$ η ελεύθερη και η εξαναγκασμένη ταλάντωση αλληλοανααιρούνται (βλέπε εξίσωση (1.20)), έτσι η συνολικό κύμα να είναι συνεχές και μηδενικής εντάσεως.

Όπως ήδη σημειώσαμε στην εισαγωγή, για το μέτωπο του φωτεινού κύματος δεν είναι σκόπιμος ο διαχωρισμός του σε ελεύθερες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Ο πραγματικός χαρακτήρας της κινήσεως που αρχίζει την χρονική στιγμή $t = 0$, την οποία αμέσως παρακάτω θα χαρακτηρίσουμε ως προπομπό, δεν μπορεί να ξεχωρίσει από την περίοδο ούτε του εξαναγκασμένου φωτεινού σήματος ούτε από την περίοδο των ελευθέρων ταλαντώσεων των ιόντων.

Συνεπώς, οι ισχυρισμοί που τέθηκαν στην εισαγωγή έχουν, κατά βάσει, αποδειχθεί.

§5. Μοναδικότητα της λύσεως και οριακές συνθήκες

Δεδομένου ότι τα αποτελέσματά μας είναι, εν μέρει, μη αναμενόμενα, μάλλον δεν είναι περιττό να αποδείξουμε, ότι η δοθείσα λύση είναι η μόνη δυνατή. Δηλαδή, οποιοσδήποτε άλλος τρόπος λύσεως θα πρέπει να οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα. Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε την ενδιαφέρουσα μέθοδο, την οποία χρησιμοποιεί και ο H. Weber⁸ για προβλήματα της καθαρής θεωρίας του Maxwell και θα την επεκτείνουμε στη θεωρία διασποράς. Η μοναδικότητα συνάγεται άμεσα από τον νόμο της διατήρησης της ενέργειας.

Έστω, ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφεται από τις $\mathcal{E} = \mathcal{E}_y$ και $\mathcal{H} = \mathcal{H}_z$ και η μετατόπιση των ιόντων από τη θέση ισορροπίας των από την $s = s_y$. Όλα τα μεγέθη εξαρτώνται από τα x και t και ότι τα θεωρούμε για $x > 0$ και $t > 0$. Τότε οι βασικές εξισώσεις⁹ είναι:

$$(1.21) \quad \begin{cases} \frac{1}{c} \dot{\mathcal{H}} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}, & \frac{1}{c} (\dot{\mathcal{E}} + N e \dot{s}) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ m \ddot{s} + 2h \dot{s} + f s = e \mathcal{E} \end{cases}$$

αν κανείς σε πρώτη προσέγγιση αγνοήσει, ως συνήθως, την επίδραση του μαγνητικού πεδίου επί των ιόντων, η οποία θα προσέθετε στην τελευταία εξίσωση ακόμη έναν όρο της μορφής $e \mathcal{H} \dot{s}/c$. Πολλαπλασιάζοντας τις τρεις εξισώσεις αντίστοιχα με $e \mathcal{H}$, $c \mathcal{E}$, $N \dot{s}$ και προσθέτοντάς τις έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \dot{\mathcal{H}} + \mathcal{E} \dot{\mathcal{E}} + N (m \dot{s} \ddot{s} + 2h \dot{s}^2 + f s \dot{s}) &= -c \left(\mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{E} \mathcal{H}}{\partial x} \end{aligned}$$

⁸ Partielle Differentialgleichungen II § 167. Η μέθοδος ουσιαστικά προέρχεται από τον E. Cohn, Elektromagnetisches Feld, κεφ. VI, § 5. Αυτή μπορεί άμεσα να γενικευθεί για την περίπτωση οριακών συνθηκών επί οιασδήποτε επιφανείας και προπαντός σε πεδίο το οποίο εξαρτάται και από τις τρεις χωρικές συντεταγμένες. Για το σκοπό μας, αρκεί να θεωρήσουμε μόνο μια συντεταγμένη και το επίπεδο οριακές συνθήκες στο $x = ct$.

⁹ Στις εξισώσεις της § 3, εξίσωση (1.13), χρησιμοποιήθηκε ο συμβολισμός $\gamma = h/m$ και $\omega_0^2 = f/m$.

Όπου το \mathfrak{E} υποδηλώνει τη ροή ενέργειας. Ολοκληρώνοντας ως προς x από 0 έως ∞ και ως προς t από 0 έως t προκύπτει:

$$(1.22) \quad \frac{1}{2} \int \left[\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{N} (m \dot{\mathfrak{s}}^2 \ddot{\mathfrak{s}} + f \mathfrak{s}^2) \right]_{t=0}^{t=t} + 2h \mathfrak{N} \int_0^t dt \int_0^{\infty} \dot{\mathfrak{s}}^2 dx = - \left[\int_0^t \mathfrak{E} dt \right]_{x=0}^{x=\infty}$$

Έστω ότι τα $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{s}_1$ και τα $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{s}_2$ είναι δύο διαφορετικές λύσεις των βασικών εξισώσεων, οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες

$$(1.23) \quad \begin{cases} \text{για } x = 0 \text{ και για κάθε } t > 0 : & \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 \\ \text{για } x = \infty \text{ και για κάθε } t > 0 : & \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 \\ \text{για } t = 0 \text{ και για κάθε } x > 0 : & \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2, \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2 \end{cases}$$

τότε για τις διαφορές $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2$ θα ισχύουν όχι μόνο οι βασικές εξισώσεις (1.21) αλλά επίσης και η εξίσωση (1.22), στην οποία, λόγω των συνθηκών (1.23), οι αντίστοιχοι όροι για $t = 0$, $x = 0$, και $x = \infty$ μηδενίζονται. Συνεπώς παραμένει:

$$(1.24) \quad \frac{1}{2} \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) dx + \frac{\mathfrak{N}}{2} \int (m \dot{\mathfrak{s}}^2 + f \mathfrak{s}^2) dx + 2h \mathfrak{N} \int_0^t dt \int_0^{\infty} \dot{\mathfrak{s}}^2 dx = 0$$

όπου τα δύο πρώτα ολοκληρώματα αναφέρονται στη χρονική στιγμή t . Από την παραπάνω σχέση συνάγομε ότι

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = \mathfrak{s} = 0$$

καθόσον οι επιμέρους όροι στο αριστερό μέρος της εξισώσεως δεν μπορούν να γίνουν αρνητικοί. Επίσης αυτοί οι όροι με της σειρά υποδηλώνουν αντίστοιχα: την ηλεκτρική και μαγνητική ενέργεια του πεδίου, την κινητική και δυναμική ενέργεια των ιόντων και την απώλεια ενέργειας λόγω της μείωσης της κίνησης των ιόντων.

Αν αντί για ένα ιόν έχουμε περισσότερα, τότε στην (1.24) προφανώς θα εμφανίζονται τα αθροίσματα των επιμέρους ενεργειών και των απωλειών των, το οποίο όμως δεν αλλάζει τίποτε στο συμπέρασμα. Για εμάς, σπουδαιότερη είναι η παρατήρηση, ότι το αποτέλεσμά μας εξακολουθεί να ισχύει και όταν η περιοχή ολοκληρώσεως $0 < x < \infty$ διασπασθεί σε επιμέρους περιοχές $0 < x < x_1$, $x_1 < x < x_2, \dots$, έτσι ώστε σε κάθε μία από αυτές τις περιοχές να ικανοποιούνται οι βασικές εξισώσεις, υπό την προϋπόθεση ότι στις διεπιφάνειες, οι οποίες μπορούν να μετατοπισθούν με το t , τα \mathfrak{E} και \mathfrak{H} όπως επίσης και τα \mathfrak{s} και $\dot{\mathfrak{s}}$ είναι συνεχή. Αντίθετα, οι παράγωγές των επιτρέπεται να κάνουν άλματα. Συνεπώς στην (1.22), αν κανείς εκτελεί την ολοκλήρωση τμηματικά με-

ταξύ του 0 και x_1 , x_1 και x_2 , μπορεί να αντικαταστήσει το $[\mathfrak{E}]_0^\infty$, κατ' αρχήν, από τα $[\mathfrak{E}]_0^{x_1} + [\mathfrak{E}]_{x_1}^{x_2} + \dots$, το οποίο, λόγω της προϋποτιθέμενης συνέχειας των \mathfrak{E} και \mathfrak{H} , μας δίδει πάλι το $[\mathfrak{E}]_0^\infty$. Παρομοίως, την ολοκλήρωση στην αριστερή πλευρά της (1.22) από 0 έως t θα πρέπει να τη εκτελέσουμε τμηματικά, από 0 έως t_1 , από t_1 έως t_2 ..., όπου $t_1, t_2 \dots$ είναι οι χρονικές στιγμές στις οποίες οι οριακές επιφάνειες (μέτωπα κύματος) διασχίζουν τις θεωρούμενες θέσεις x . Λόγω της προϋποτιθέμενης συνέχειας των \mathfrak{E} , \mathfrak{H} , s, \dot{s} αυτές οι χρονικές στιγμές δεν έχουν καμιά επιπλέον συνεισφορά στην (1.22). Έτσι, η μοναδικότητα έχει αποδειχθεί γι' αυτή τη περίπτωση.

Η εφαρμογή των προηγούμενων παραγράφων στο πρόβλημά μας διατυπώνεται ως εξής: Για $t = 0$ σε όλο το διασπείρον μέσο επικρατεί ηρεμία.

$$(1.25) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{H} = \dot{s} = 0 \quad \text{για } t = 0 \text{ και } x > 0$$

Η αρχική θερμική κίνηση των ιόντων παραβλέπεται, καθόσον η συνεισφορά της μπορεί να ελαττωθεί είτε αυξάνοντας την ένταση του σήματος είτε μειώνοντας τη θερμοκρασία. Για $x = \infty$, όπου το σήμα αφικνείται μετά από άπειρο χρόνο, επικρατεί επίσης συνεχής ηρεμία. Ιδιαίτερα ισχύει:

$$(25a) \quad \mathfrak{E} = 0 \quad \text{για } x = \infty \text{ και } t > 0$$

Για $x = 0$ για το \mathfrak{E} θέτομε:

$$(25b) \quad \mathfrak{E} = f(t) \quad \text{για } x = 0 \text{ και } t > 0$$

Οι συνθήκες (1.25) αντιστοιχούν επακριβώς στις απαιτήσεις (1.23).

Ως οριακή επιφάνεια (διεπιφάνεια) θεωρούμε το επίπεδο $x = ct$. Σε αυτό η \mathfrak{E} είναι συνεχής. Μάλιστα (βλέπε τις προηγούμενες παραγράφους υπό το c) είναι $\mathfrak{E} = 0$, ανεξάρτητα αν κανείς προσεγγίζει την οριακή επιφάνεια από $x < ct$ ή από $x > ct$. Με τον ίδιο τρόπο συνάγεται και η συνέχεια των \mathfrak{H} , s, \dot{s} . Δηλαδή, αν η \mathfrak{E} δίδεται από την έκφραση της εξίσωσης (12a):

$$\mathfrak{E} = \int e^{-i\omega t + ikx} \varphi(\omega) d\omega \quad \varphi(\omega) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\omega^2 - (2\pi/\tau)^2}$$

Τα αντίστοιχα \mathfrak{H} και s προσδιορίζονται από την πρώτη και την τρίτη βασική εξίσωση ως

$$\mathfrak{H} = \int \frac{ke}{\omega} \cdot e^{-i\omega t + ikx} \varphi(\omega) d\omega, \quad \dot{s} = \int \frac{ke}{\omega} \cdot e^{-i\omega t + ikx} \cdot \frac{\varphi(\omega) d\omega}{-m\omega^2 - i2h\omega + f}$$

Σε αυτά τα ολοκληρώματα μπορεί κανείς να εφαρμόσει άμεσα, την ίδια ανάλυση που χρησιμοποιήθηκε στις προηγούμενες παραγράφους υπό το c). Δηλαδή, αν μηδενίζεται το \mathfrak{E} , μηδενίζονται και τα \mathfrak{H} , s, \dot{s} κατά την αμφίπλευρη προσέγγιση στο οριακό επίπεδο $x = ct$. Με αυτό, σε συνδυασμό με τις συνθήκες, (1.25) αποδείξαμε τη μοναδικότητα της λύσεώς μας και δείξαμε ότι δεν υπάρχει άλλη λύση.

Αναφορικά με τα όρια ισχύος της θεωρίας διασποράς θα θέλαμε να τονίσουμε με σαφήνεια έναν περιορισμό, πάνω στον οποίο σιωπηρά εδράζονται όλοι οι υπολογισμοί μας: Σε μια απόσταση ίση με ένα μήκος κύματος θα πρέπει να υπάρχει ένας πολύ μεγάλος αριθμός σωματιδίων. Μόνο κάτω από αυτές τις συνθήκες μπορούμε να μιλούμε για μια συνεχή κατανομή του διανύσματος ταλαντώσεως ξ και να παραβλέψουμε τις μοριακές ασυνέχειες. Αυτή η συνθήκη, ως γνωστόν, ικανοποιείται έως και εντός της υπεριώδους περιοχής, όμως δεν όχι στις υψηλότερες συχνότητες (ακτίνες Röntgen). Έτσι, αν θέλουμε σε αυτή την ανάλυση να συμπεριλάβουμε και αυτές τις συχνότητες, θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι επιχειρούμε μια επέκταση της θεωρίας διασποράς πέραν της περιοχής ισχύος της.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να προσθέσω μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση, την οποία οφείλω στον Dr T. Levi-Civita. Μου επισήμανε το γεγονός, ότι κανείς μπορεί να αποδείξει ότι το μέτωπο κύματος διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, c , με τη βοήθεια των σχέσεων (1.21) των επονομαζόμενων και "σχέσεις συμβατότητας"¹⁰.

Έστω ότι,

$$(1.26) \quad e = \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right] \quad \eta = \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right]$$

είναι οι ασυνέχειες των $(\partial \mathcal{E} / \partial x)$, $(\partial \mathcal{H} / \partial x)$ κατά τη διάσχιση της επιφάνειας ασυνέχειας (μετώπου κύματος). Αφού όμως αποδείξαμε ότι τα \mathcal{E} , \mathcal{H} , $\dot{\xi}$ είναι συνεχή θα έχουμε

$$(26a) \quad [\mathcal{E}] = [\mathcal{H}] = [\dot{\xi}] = 0$$

Αν συμβολίσουμε με v την ταχύτητα με την μετατοπίζεται η ασυνέχεια κατά μήκος της καθέτου στο μέτωπο κύματος, βάσει των "ταυτόσημων σχέσεων συμβατότητας" θα έχουμε:

$$(26b) \quad [\dot{\mathcal{E}}] = -v e \quad [\dot{\mathcal{H}}] = -v \eta$$

Αυτό προκύπτει αμέσως αν κανείς σχηματίσει την εξίσωση

$$\mathcal{E}(t + \Delta t, x + \Delta x) - \mathcal{E}(t, x) = \dot{\mathcal{E}} \Delta t + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \Delta x$$

αντίστοιχα για την πριν και την μετά πλευρά της ασυνέχειας και τις αφαιρέσει μεταξύ τους και επιλέξει $\Delta x = v \Delta t$. Αν προχωρήσει κανείς με αντίστοιχο τρόπο για τις βασικές εξισώσεις (1.21) και χρησιμοποιήσει τις (1.26), (26a) και (26b) προκύπτει

$$-\frac{v}{c} \eta = -e, \quad -\frac{v}{c} e = -\eta$$

και αν τις πολλαπλασιάσει παίρνει

¹⁰ Περισσότερα π.χ. στο Encykl. d. Math. Wiss. 4. Art. 19 von G. Zemplen

$$(1.27) \quad \frac{v^2}{c^2} = 1$$

δηλαδή, το αποτέλεσμα μας: Η ταχύτητα φάσεως (μετώπου κύματος) ισούται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

§6. Οι προπομποί

Την κατάσταση, αμέσως μετά την άφιξη του σήματος, δηλαδή για μικρές τιμές του $t = t - x/c$, μπορούμε να την χειριστούμε ως εξής:

Ξεκινώντας με την εξίσωση (12a) της ενότητας 4, η οποία πρέπει να ολοκληρωθεί κατά μήκος του αρχικού δρόμου u . Αυτό δίδει:

$$(1.28) \quad f(t, x) = \frac{1}{\tau} \left(\int e^{-i\omega t + iKx} \frac{d\omega}{\omega^2 - (2\pi/\tau)^2} \right)$$

Όπου K ίσο με:

$$(28a) \quad K = k - \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} - 1 \right)$$

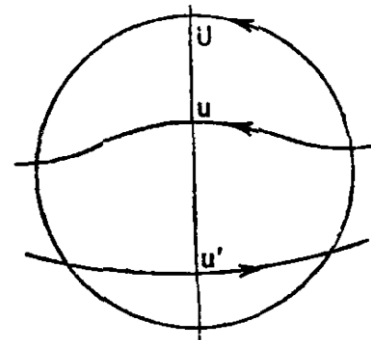
Εδώ, όπως και στη συνέχεια, παραλείφθηκαν οι απώλειες των ιόντων, δηλαδή $\gamma = 0$, οπότε και συνεπώς και για τον συντελεστή εξασθένησης, $\kappa = 0$.

Στον δρόμο ολοκληρώσεως u προσάπτομε στο κάτω ημιεπίπεδο και τον δρόμο u' (βλέπε Σχήμα 1-9). Αυτό είναι επιτρεπτό επειδή για $t > 0$ ο δρόμος u' μπορεί να παραμορφωθεί έως το άπειρο του αρνητικού ημιεπιπέδου, ακριβώς όπως προηγούμενα οι δρόμοι στο Σχήμα 1-6 ή στο Σχήμα 1-7. Οι δρόμοι u και u' μπορούν να συνδυασθούν σε ένα δρόμο U , σε πολύ μεγάλη απόσταση από το μηδέν του ω - επιπέδου, πάνω στον οποίο θα πρέπει να γίνει η ολοκλήρωση στην εξίσωση (1.28).

Επειδή το ω , πάνω σε όλον το δρόμο U , είναι πάρα πολύ μεγάλο, αναπτύσσομε το ριζικό στο K και διατηρούμε μόνο τη χαμηλότερη εκθετική τάξη του $1/\omega$. Οπότε έχομε:

$$Kx \approx \frac{a^2 x}{2c} \cdot \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + \dots \right) \approx \frac{\xi}{\omega}$$

με τον συμβολισμό



Σχήμα 1-9

$$(1.29) \quad \xi = \frac{a^2 x}{2c}$$

Το ολοκλήρωμα (1.28), αν αντικαταστήσουμε στον παρονομαστή το $\omega^2 - (2\pi/\tau)^2$ με ω^2 γίνεται:

$$(1.30) \quad f(t, x) = \frac{1}{\tau} \int e^{-i\omega t + i\frac{\xi}{\omega}} \frac{d\omega}{\omega^2}$$

Ο εκθέτης του e μπορεί να γραφεί και ως:

$$-i \left(\omega t + \frac{\xi}{\omega} \right) = -i\sqrt{\xi t} \left(\omega \sqrt{\frac{t}{\xi}} + \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\xi}{t}} \right) = -2i\sqrt{\xi t} \cos u$$

Αν τη νέα μεταβλητή ολοκλήρωσεως την ορίσουμε u ως

$$(1.31) \quad e^{iu} = \omega \sqrt{\frac{t}{\xi}} \quad \text{από όπου} \quad \frac{d\omega}{\omega^2} = i \sqrt{\frac{t}{\xi}} e^{-iu} du$$

Οπότε η (1.30) γίνεται:

$$(1.32) \quad f(t, x) = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{t}{\xi}} \int e^{-2i\sqrt{t\xi} \cos u} e^{-iu} i du$$

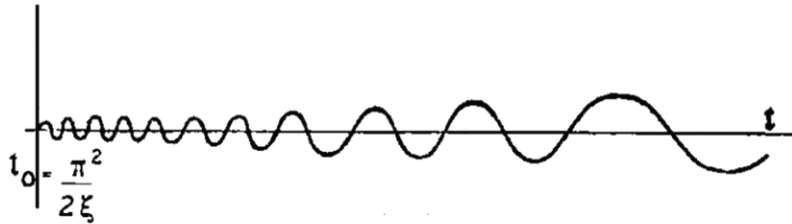
Εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μεταβλητή u μεταβάλλεται από 0 έως 2π . Με βάση την (1.31) αυτό αντιστοιχεί σε μια περιφορά περί το μηδέν του ω – επιπέδου, πάνω σε μια περιφέρεια ακτίνας $|\omega| = \sqrt{\xi/t}$, δηλαδή για αρκούντως μικρά t σε έναν δρόμο U , όπως υποθέσαμε στο Σχήμα 1-9. Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην εξίσωση (1.32) δεν είναι τίποτε από την ολοκληρωτική μορφή της συναρτήσεως Bessel¹¹ πρώτης τάξεως, μεταβλητής $2\sqrt{\xi t}$. Συνεπώς έχουμε: t

$$(1.33) \quad f(t, x) = \frac{2\pi}{\tau} \sqrt{\frac{t}{\xi}} J_1(2\sqrt{t\xi})$$

Με βάση τη γνωστή συμπεριφορά της συναρτήσεως J_1 , αναφορικά με την τάξη μέγεθους του σήματος αμέσως μετά την άφιξή του, δηλαδή για μικρές τιμές του t θα έχουμε τα ακόλουθα: Το αρχικό πλάτος θα είναι εξαιρετικά μικρότερο του 1, δηλαδή σε σχέση με το πλάτος του προσπίπτοντος κύματος. Η αρχική περίοδος του κύματος είναι εξαιρετικά μικρή συγκρινόμενη με το τ , δηλαδή την περίοδο του προσπίπτοντος κύματος. Η περίοδος και το πλάτος αυξάνουν σταδιακά με το χρόνο λόγω του παράγοντος \sqrt{t} πριν από τη συνάρτηση J_1 , όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 1-10, όπου πάντα θα πρέπει

¹¹ Jahnke-Emde, Funktionstabeln p. 169

να έχουμε υπόψη μας, ότι η προσεγγιστική εξίσωση (1.32) απαιτεί μικρές τιμές του t/ξ . Το πώς διαμορφώνεται η κατάσταση για μεγάλες τιμές του $t = t - x/c$ και πως τελικά οι προπομποί εξελίσσονται σε κύριο κύμα περιόδου τ όπως το προσπίπτον φως θα καταπιασθεί ο Dr Brillouin στην επόμενη εργασία.



Σχήμα 1-10

Ένα σημείο ιδιαίτερου ενδιαφέροντος θα πρέπει να τονισθεί.

Με βάση την εξίσωση (1.32) η περίοδος των πρώτων προπομπών προσδιορίζεται από την πρώτη ρίζα της συναρτήσεως $J(z)$, η οποία συμβαίνει για περίπου $z = \pi$. Από αυτή, και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (1.29), η αρχική περίοδος t_0 υπολογίζεται ίση με

$$t_0 = \frac{\pi^2}{2\xi} = \frac{\pi^2 c}{a^2 x}$$

Αυτή είναι ένας χρόνος, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από την περίοδο τ του προσπίπτοντος φωτός όπως επίσης και από τη ιδιοσυχνότητα των ιόντων, αλλά προσδιορίζεται μόνον από το διανυθέν βάθος και από ισχύ διασποράς του μέσου, δηλαδή των αριθμών των ιόντων N . Ήδη, για την ανεξαρτησία της αρχικής περιόδου από το χρώμα του προσπίπτοντος φωτός, κάναμε χρήση σε ορισμένα συμπεράσματα που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή μας.

(υποβλήθηκε την 23^η Φεβρουαρίου 1914)

2. Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien von L. Brillouin

2. Σχετικά με την διάδοση του φωτός σε διασπείροντα μέσα. υπό L Brillouin. (απόδοση Σωτήριος Βες)

§1.

Στην παρούσα εργασία συνεχίζω με το πρόβλημα που τέθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο από τον Dr. Sommerfeld. Η πραγμάτευση της διαδόσεως ενός μονόπλευρα περατωμένου σήματος οδηγεί στο ολοκλήρωμα

$$(2.1) \quad f(t, x) = \frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{e^{-i(\omega t - kx)}}{\omega - \nu} d\omega$$

το οποίο εκτείνεται στο ω –επίπεδο από $-\infty$ έως $+\infty$ και με δρόμο ολοκληρώσεως $+u$ (βλέπε § 2, του προηγούμενου κεφαλαίου και αντίστοιχη εξίσωση (1.9)). Το $\nu = 2\pi/\tau$ είναι η συχνότητα και τ η περίοδος του σήματος, το k έχει την τιμή

$$(2.2) \quad k = \frac{\omega}{c} n$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και n ο μιγαδικός δείκτης διαθλάσεως (βλέπε εξίσωση (1.13))

$$(2') \quad n^2 = \left(1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - 2i\omega\gamma - \omega^2} \right)$$

Το ολοκλήρωμα (2.1) παριστά το σήμα σε χρόνο t σε βάθος x εντός του μέσου με δείκτη διαθλάσεως n . Αν τον εκθέτη του e τον συμβολίζουμε με w έχουμε:

$$(2.3) \quad w = -i(\omega t - kx) = \frac{x}{c} \nu$$

$$(2.4) \quad \nu = -i\omega(\Theta - n)$$

$$(4a) \quad \Theta = \frac{ct}{x}$$

Ένα σήμα που διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός c θα έφθανε σε βάθος x σε χρόνο $t = x/c$, δηλαδή για $\theta = 1$. Στην προηγούμενη εργασία ο Dr. Sommerfeld έδειξε κανένα σήμα δεν μπορεί να διαδοθεί με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή ότι η $f(t, x)$ για $\theta < 1$ μηδενίζεται. Επιπλέον θέτομε:

$$(4c) \quad \mathfrak{h} = t - \frac{x}{c}$$

Θα μελετήσω τη μορφή του σήματος και θα δείξω, ότι κανείς μπορεί να δώσει έναν ακριβή ορισμό της ταχύτητας σήματος και ότι αυτή η ταχύτητα σήματος είναι ταυτόσημη με την ταχύτητα ομάδος, εκτός από σήματα των οποίων το μήκος κύματος γειτνιάζει την περιοχή ανωμάλου διασκεδασμού του μέσου.

Έστω ότι ξ και η είναι μιγαδικές συντεταγμένες στο μιγαδικό ω – επίπεδο.

$$\omega = \xi + i\eta$$

και X και Y είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος της συναρτήσεως v

$$v = X + iY$$

Για τη μελέτη του ολοκληρώματος, το απλούστερο είναι να παραμορφώσουμε τον δρόμο ολοκλήρωσης έτσι, ώστε το X να παίρνει όσο το δυνατόν μεγάλη αρνητική τιμή, καθόσον τότε μηδενίζεται το ολοκλήρωμα και απομένει μόνο υπολογισμός του σε τμήματα του δρόμου ολοκλήρωσης, για τα οποία η τιμή του X δεν είναι πολύ μεγάλη.

Ως γνωστόν, βάσει των εξισώσεων

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial Y}{\partial \eta} \quad \frac{\partial X}{\partial \eta} = -\frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

η συνάρτηση X δεν εμφανίζει πουθενά ένα πεπερασμένο ελάχιστο ή μέγιστο. Μπορεί να εμφανίζει μόνο σαγματικά σημεία, όταν

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0$$

Σε ένα τέτοιο σημείο, η συνάρτηση Y παρουσιάζει σαγματικό σημείο, το οποίο προσδιορίζεται από την εξίσωση

$$(2.5) \quad \frac{dv}{d\omega} = 0$$

Στα επόμενα, θα θεωρήσω το μιγαδικό επίπεδο ως έναν τοπολογικό χάρτη με το X ως ύψος και θα ομιλώ για ισοϋψείς (ισοδυναμικές) και μέγιστες κλίσεις στο X . Οι μέγιστες κλίσεις στο X είναι οι ισοϋψείς στο Y . Αυτές μπορούν να εκκινούν μόνο από τα

σημεία στα οποία το X είναι άπειρο, καθόσον δεν εμφανίζονται πεπερασμένα μέγιστα και ελάχιστα. Η μετάπτωση από τη μία κοιλάδα στην άλλη υλοποιείται το απλούστερον υπερβαίνοντας ένα σαγματικό σημείο. Η ολοκλήρωση πλησίον των σαγματικών σημείων είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος¹. Αποδεικνύεται, ότι τα εμπλεκόμενα σαγματικά σημεία κείνται πάντα πλησίον του πραγματικού άξονα.

Με βάση την (2.5) και λαμβάνοντας υπόψη την (2.3) η συνθήκη για τα σαγματικά σημεία είναι:

$$(2.6) \quad t - \frac{dk}{d\omega} x = 0$$

Όταν το ω είναι πραγματικό, δηλαδή παριστά μια πραγματική συχνότητα, τότε η ταχύτητα ομάδος σε αυτή τη συχνότητα (βλέπε προηγούμενο κεφάλαιο § 1) ισούται με $dk/d\omega$. Συνεπώς, τη χρονική στιγμή t το σαγματικό σημείο βρίσκεται σε εκείνη τη συχνότητα ω , στην οποία η ταχύτητα ομάδος ισούται με x/t . Κατ' ακολουθίαν, κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος κανείς μπορεί να περιορισθεί στη γειτονιά του σαγματικού σημείου, δηλαδή στη γειτονιά αυτής της συχνότητας. Οπότε, κατά προσέγγιση, είναι ορθό να ειπωθεί, ότι κάθε επιμέρους κύμα του σήματος διαδίδεται με την ταχύτητα ομάδος του, τουλάχιστον όσο παραμένουμε στις περιοχές κανονικής διασποράς.

Επισκόπηση

Στην § 2 θα μελετηθεί το μιγαδικό ω –επίπεδο, ιδιαίτερα στη γειτονιά των σημείων, όπου X είναι μηδενικό ή απειρίζεται. Η § 3 δίδει τη θέση των διαφόρων σαγματικών σημείων, την μετατόπισή των με το χρόνο και ορισμένα στοιχεία σχετικά με τη τάξη μεγέθους των επιμέρους μεγεθών που υπεισέρχονται στις εκφράσεις. Στην § 4 παρουσιάζεται η τροποποίηση με το χρόνο του δρόμου ολοκλήρωσης. Από αυτό προκύπτουν μερικές γενικές διαπιστώσεις σχετικά με την ταχύτητα σήματος. Η § 5 περιέχει την ολοκλήρωση στη γειτονιά των σαγματικών σημείων, δηλαδή τον υπολογισμό των προπομπών. Αυτά τα αποτελέσματα, μας επιτρέπουν στη § 6 να προσδιορίσουμε την ταχύτητα σήματος ακόμη και για την περίπτωση της ανώμαλης διασποράς. Τα συμπεράσματα συνίστανται από μερικές παρατηρήσεις σχετικά με τη σύγκριση της χρησιμοποιηθείσας "μεθόδου των σαγματικών σημείων" και της "μεθόδου σταθερής φάσεως"

§2. Μελέτη του μιγαδικού ω – επιπέδου

Αναζητούμε τις περιοχές του ω – επιπέδου, όπου το πραγματικό μέρος X του εκθέτη είναι αρνητικό. Το όριο αυτής της περιοχής προσδιορίζεται από την καμπύλη που ικανοποιεί την εξίσωση $X = 0$. Όμως, ήδη ξέρομε, πως συμπεριφέρεται η X στο άπειρο (βλέπε Sommerfeld § 4):

¹ Σχετικά με τη μέθοδο των σαγματικών σημείων και της εφαρμογής της βλέπε P. Debye, Math. Annalen 67. P. 535. Sitzuunsber. d. Bayer. Akad. 1910; zuerst bei Riemann, Ges. Werke 1876, Nachlaß p. 400.

- Για $\theta < 1$ Το X είναι άπειρο
Είναι άπειρο αρνητικό πάνω από τον πραγματικό άξονα.
Είναι άπειρο θετικό κάτω από τον πραγματικό άξονα.
- Για $\theta = 1$ Το X μηδενίζεται στο άπειρο
- Για $\theta > 1$ Το X είναι άπειρο
Είναι άπειρο θετικό πάνω από τον πραγματικό άξονα.
Είναι άπειρο αρνητικό κάτω από τον πραγματικό άξονα.

Από το άλλο μέρος όμως, επί του πραγματικού άξονα (βλέπε Sommerfeld εξίσωση (1.16)) έχουμε,

$$(2.7) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}(1+i\kappa)$$

(λ = μήκος κύματος εντός του διασπείροντος μέσου, κ = σταθερά απορρόφησης). Με τη βοήθεια της εξίσωσης (2.2) μπορούμε να την γράψουμε

$$k = \frac{\omega}{c} n_r (1+i\kappa)$$

Αν ο μιγαδικός δείκτης διαθλάσεως έχει τη μορφή

$$(7') \quad n = n_r + in_i \quad n_i = \kappa n_r$$

Το c/n_r , ως γνωστόν, παριστά την ταχύτητα φάσεως V . Οπότε τώρα, βάσει της (2.4), το πραγματικό μέρος του $\nu = -i\omega(\theta - n)$ γίνεται

$$X = -\omega n_i = -\omega \kappa n_r$$

Το X λοιπόν πάνω στο πραγματικό άξονα είναι παντού θετικό, εκτός από τις συχνότητες ω , όπου μηδενίζεται η σταθερά εξασθένησης κ . Αναφορικά με το μέγεθος του X , αυτό είναι μεγάλο στη περιοχή της ανώμαλης διασποράς, αντίθετα μικρό για πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές της συχνότητας ω .

Θεωρούμε τώρα το X πάνω στις ευθείες $\eta = -\gamma$, οι οποίες προσδιορίζονται από τα σημεία N_1, N_2 (όπου το X μηδενίζεται) και τα U_1, U_2 (όπου το X απειρίζεται) και τη γειτονιά των κλάδων διακλαδώσεων N_1, U_1 και N_2, U_2 . Οι συντεταγμένες αυτών των σημείων είναι (βλέπε Sommerfeld § 4)

$$\begin{array}{lll} U_1, U_2 & \eta = -\gamma & \xi_\infty = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \\ N_1, N_2 & \eta = -\gamma & \xi_\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 + a^2 - \gamma^2} \end{array}$$

Πάνω στις ευθείες $\eta = -\gamma$ ο n έχει την τιμή

$$(2.8) \quad n = \sqrt{1 + \frac{a^2}{\xi_\infty^2 - \xi^2}}$$

δηλαδή, στα διαστήματα $0 < \xi < \xi_\infty$, $\xi_\omega < \xi < \infty$ είναι θετικά πραγματικό, ενώ για το διάστημα $\xi_\infty < \xi < \xi_\omega$ είναι καθαρά μιγαδικό και μάλιστα θετικό από τη μια πλευρά της τομής $\xi_\omega \xi_\infty$ και αρνητικό από την άλλη πλευρά. Για να προσδιορίσουμε αυτά τα πρόσημα, θα θεωρήσουμε τον n στη γειτονιά των σημείων N_1, U_1 .

Στη γειτονιά του N_1 θέτουμε:

$$n = -i\gamma + \xi_\omega + re^{ia}$$

όπου r, a υποδηλώνουν τις πολικές συντεταγμένες περί το σημείο N_1 , και βρίσκουμε

$$(2.9) \quad n^2 = \frac{2\xi_\omega}{a^2} re^{ia} \quad n = \frac{\sqrt{2\xi_\omega r}}{a} e^{\frac{ia}{2}}$$

Και συνεπώς για

$$\begin{aligned} a = 0 & \quad n_0 = \frac{\sqrt{2\xi_\omega r}}{a} \\ a = \frac{\pi}{2} & \quad n_{\frac{\pi}{2}} = n_0 \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ a = \pi & \quad n_\pi = +in_0 \\ a = -\frac{\pi}{2} & \quad n_{-\frac{\pi}{2}} = n_0 \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ a = -\pi & \quad n_{-\pi} = -in_0 \end{aligned}$$

Παρομοίως αν στη γειτονιά του U_1 έχουμε:

$$n = -i\gamma + \xi_\infty + Re^{i\theta}$$

Παίρνουμε

$$(2.10) \quad \begin{aligned} n^2 &= -\frac{a^2}{2R\xi_\infty} e^{-i\theta} = \frac{a^2}{2R\xi_\infty} e^{+i(\pi-\theta)} \\ n &= \frac{a}{\sqrt{2R\xi_\infty}} e^{+i\frac{\pi-\theta}{2}} \end{aligned}$$

μετατοπίζεται προς το U_1 . Ένα δεύτερο σημείο τομής με τετμημένη $\xi = AB$ μπορεί να εμφανισθεί μεταξύ 0 και U_1 .

Από τη συμπεριφορά του X στη γειτονιά του U_1 συνάγεται, ότι η καμπύλη $X = 0$ θα πρέπει να ξεκινάει από αυτό το ίδιο το σημείο U_1 . Στη γειτονιά του U_1 είδαμε ότι είχαμε

$$n = \frac{a}{\sqrt{2R\xi\omega}} \left(\cos \frac{\omega}{2} + i \sin \frac{\omega}{2} \right)$$

Συνεπώς

$$X = \gamma \Theta + \frac{a}{\sqrt{2R\xi\omega}} \left(\gamma \cos \frac{\omega}{2} + i \xi \omega \sin \frac{\omega}{2} \right)$$

Αν ω_1 είναι μια λύση της εξίσωσης

$$\tan \frac{\omega_1}{2} = \frac{\xi}{\gamma}$$

και αν $\xi_\infty \gg \gamma$, τότε το ω_1 είναι μια γωνία κοντά στο π και η οποία ορίζεται πολλαπλάσιο του 2π . Τότε

$$X = -\gamma \Theta + \frac{b}{\sqrt{R}} \sin \frac{\omega - \omega_1}{2}$$

με τη σύντμηση

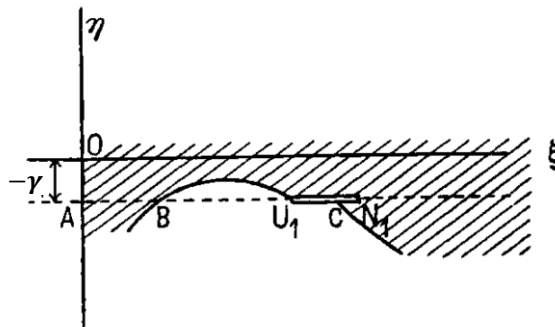
$$b = a \sqrt{\frac{\gamma^2 + \xi_\infty^2}{2\xi_\infty}}$$

Η καμπύλη $X = 0$, για μικρά R και μικρά $\omega - \omega_1$ γίνεται η ελικοειδής

$$\omega = \omega_1 + \frac{2\gamma\Theta}{b} \sqrt{R}$$

η οποία στο U_1 αγγίζει την ευθεία $\omega = \omega_1$.

Το Σχήμα 2-3 παριστά το μιγαδικό επίπεδο στη γειτονιά των τομών $U_1 N_1$. Στις γραμμοσκιασμένες περιοχές το X είναι αρνητικό.



Σχήμα 2-3

§3. Θέση των σαγματικών σημείων

Αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει δεν είναι αυτή καθαυτή η καμπύλη $X = 0$, αλλά η **θέση των σαγματικών σημείων**. Άρα και προσδιορισθούν αυτά, τότε ως δρόμος ολοκληρώσεως μπορεί να ληφθεί, χωρίς κανένα πρόβλημα, κατά μήκος των καμπυλών μέγιστης κλίσης που διέρχονται από τα σαγματικά σημεία. Η καμπύλη $X = 0$ είναι μία από τις ισοϋψείς που είναι ορθογώνιες στις καμπύλες μέγιστης κλίσης.

A. Η περιοχή κοντά στην αρχή των αξόνων

Για να προσδιορίσουμε τα σαγματικά σημεία στη γειτονιά της αρχής των αξόνων αναπτύσσουμε τον δείκτη διαθλάσεως, n σε δυνάμεις της συχνότητας ω :

$$n = \sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - 2i\omega\gamma - \omega^2}} = \sqrt{\frac{\omega_2^2 - 2i\omega\gamma - \omega^2}{\omega_0^2 - 2i\omega\gamma - \omega^2}} \quad (\omega_2^2 = a^2 + \omega_0^2)$$

Έχουμε να αναπτύξουμε το $(\omega_2^2 - a)/(\omega_0^2 - a)$ όπου το $a = 2i\gamma\omega + \omega^2$ είναι πολύ μικρότερο από τα ω_0^2 και ω_2^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_2^2 - a}{\omega_0^2 - a} &= \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{a}{\omega_2^2} \right) \left(1 + \frac{a}{\omega_0^2} + \dots \right) \\ (2.11) \quad n &= \frac{\omega_2}{\omega_0} \left(1 + \frac{\omega}{2} \frac{a^2}{\omega_0^2 \omega_2^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\omega_2}{\omega_0} + A \omega (\omega + 2i\gamma) + \dots \end{aligned}$$

όπου έχει εισαχθεί το a και το A ορισθεί ως:

$$A = \frac{a^2}{2\omega_0^2 \omega_2}$$

Από την (2.4) έχουμε

$$(2.12) \quad v = -i\omega(\Theta - n) = -\omega(\mathfrak{b}' - A\omega(\omega + 2i\gamma))$$

όπου έχει τεθεί (βλέπε εξίσωση 4b)

$$(12') \quad \mathfrak{b}' = \Theta - \frac{\omega_2}{\omega_0} = \mathfrak{b} - \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - 1 \right)$$

Για την εύρεση των σαγματικών σημείων δεν έχουμε παρά να σχηματίσουμε τις

$$\frac{dv}{d\omega} = 0 \quad b' - A\omega(3\omega + 4i\gamma) = 0$$

Οι ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι

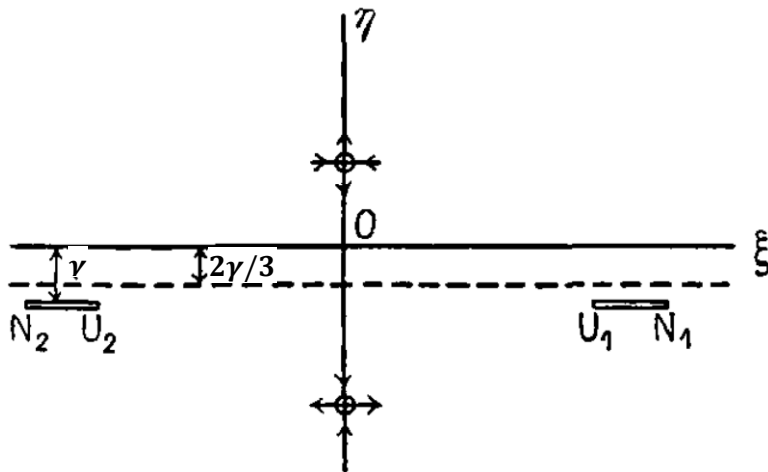
$$\omega = -\frac{2}{3}i\gamma \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3b'}{A} - 4\gamma^2}$$

Περίπτωση A 1: $b' < \frac{4}{3}A\gamma^2$

Τα σαγματικά σημεία δίδονται από την

$$(2.13) \quad \omega = i\left(-\frac{2}{3}\gamma \pm \frac{1}{3}\sqrt{4\gamma^2 - \frac{3b'}{A}}\right)$$

Αυτά κείνται επί του μιγαδικού άξονα συμμετρικά ως προς στο σημείο $\xi = 0, \eta = -2\gamma/3$. Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι οι καμπύλες μέγιστης κλίσης που διέρχονται από αυτά τα σημεία είναι παράλληλες προς τους άξονες (βλέπε Σχήμα 2-4). Τα βέλη υποδηλώνουν τη διεύθυνση αύξησης κατά μήκος των καμπυλών μέγιστης κλίσης.



Σχήμα 2-4

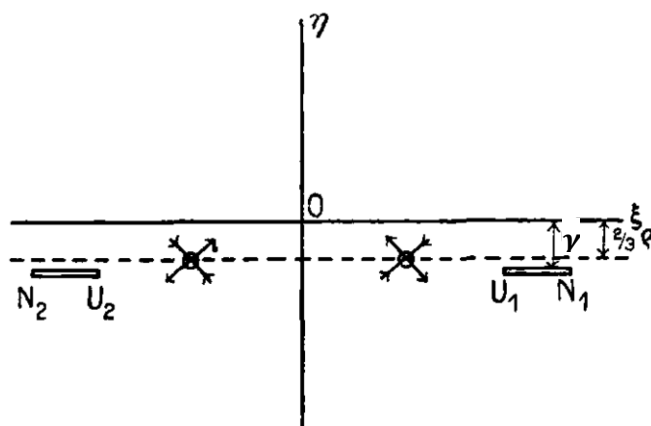
Περίπτωση A 2: $b' > \frac{4}{3}A\gamma^2$

Τα σαγματικά σημεία κείνται πάνω στις ευθείες $\eta = -2\gamma/3$ συμμετρικά περί τον μιγαδικό άξονα.

$$(2.14) \quad \omega = -i\frac{2}{3}\gamma \pm \xi_p$$

$$\xi_p = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3b'}{A} - 4\gamma^2}$$

Οι αντίστοιχες καμπύλες μέγιστης κλίσης σχηματίζουν γωνία 45° με τους άξονες (βλέπε Σχήμα 2-5)



Σχήμα 2-5

Περίπτωση Α 3: $b' = \frac{4}{3}A\gamma^2$

Σε αυτή τη περίπτωση υφίσταται μόνο ένα ιδιαίτερο σαγματικό σημείο, το

$$(2.15) \quad \omega = -i\frac{2}{3}\gamma$$

για το οποίο μηδενίζονται ταυτόχρονα το $dv/d\omega$ και το $d^2v/d\omega^2 = iA(6\omega + i\gamma)$. Για να υπολογίσουμε το v πλησίον αυτού του σημείου, εισαγάγομε τις πολικές συντεταγμένες r, α περί το σαγματικό σημείου

$$\omega = -i\frac{2}{3}\gamma + r e^{i\alpha}$$

οπότε γίνεται

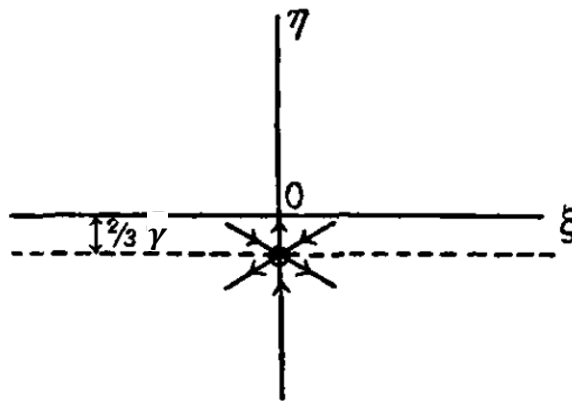
$$\begin{aligned} \omega &= i(b' \omega + A\omega^3 + 2iA\gamma\omega^2) = iA\left(-\frac{4}{3}\gamma^2\omega + 2i\gamma\omega^2 + \omega^3\right) \\ &= v_p + iAr^3 e^{3ia} \\ v_p &= -\frac{8}{27}A\gamma^3 \end{aligned}$$

συνεπώς

$$X = X_p - Ar^2 \sin 3a .$$

Στο Σχήμα 2-6 δίδεται η εικόνα αυτού του ειδικού σαγματικού σημείου ως επίσης και η πορεία των καμπυλών μεγίστης κλίσης προς αυτό.

Τα δύο, λοιπόν, σαγματικά σημεία τα οποία αρχικά κείνται επί του μιγαδικού άξονα, με αυξανόμενο χρόνο πλησιάζουν αμοιβαία μεταξύ των και τη χρονική στιγμή



Σχήμα 2-6

$$b' = \frac{4}{3}A\gamma^2 \left(\text{δηλαδή για } \Theta = \frac{\omega_2}{\omega_0} + \frac{4}{3}A\gamma^2 \right)$$

συμπίπτουν, ενώ στη συνέχεια απομακρύνονται μεταξύ των συμμετρικά ως προς τον μιγαδικό άξονα.

Β. Σαγματικά σημεία μακριά από την αρχή των αξόνων

Θεωρούμε το μιγαδικό ω – επίπεδο και παραλείπομε το ω_0^2 ως προς το ω^2 . Τότε η (2'') γίνεται

$$n^2 = 1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - 2i\gamma\omega + \omega^2} \simeq 1 - \frac{a^2}{\omega(2i\gamma + \omega)}$$

και επειδή ο δεύτερος όρος είναι πολύ μικρός έχουμε

$$(2.16) \quad n = 1 - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\omega(2i\gamma + \omega)}$$

και η εξίσωση (2.4) δίδει

$$v = -i\omega(\Theta - n) = -i\omega b - i \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2i\gamma + \omega}$$

όπου $\theta - 1 = b$ (βλέπε εξίσωση 4b). Τα σαγματικά σημεία ορίζονται μέσω των

$$\frac{d\nu}{d\omega} = 0 \quad b - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{(2i\gamma + \omega)^2} = 0$$

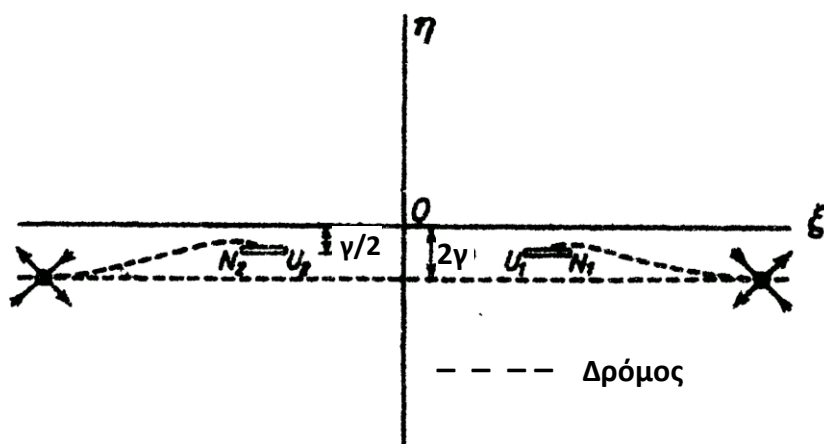
Από όπου

$$(2.17) \quad \omega_p = -2i\gamma \pm \xi_p \quad \xi_p = \frac{a}{\sqrt{2b}}$$

Συνεπώς, επί των ευθειών $\eta = -2\gamma$, συμμετρικά ως προς τον η - άξονα, έχουμε δύο σαγματικά σημεία. Για το ν θα έχουμε λοιπόν

$$\nu = -i \frac{a^2}{2} \left(\frac{\omega}{\xi_p^2} + \frac{1}{2i\gamma + \omega} \right)$$

Οι ισοδυναμικές του X που διέρχονται από ω_p είναι ευθείες παράλληλες προς τους άξονες. (Σε όλο μήκος των ευθειών $\eta = -2\gamma$ και εντός των ορίων που ισχύει η προσέγγιση $X = -2\gamma b$). Οι ευθείες μέγιστης κλίσης είναι υπό κλίση 45° (βλέπε Σχήμα 2-7). Για $b = 0$ τα σαγματικά σημεία κείνται στο άπειρο επί των ευθειών $\eta = -2\gamma$. Με αυξανό-



Σχήμα 2-7

μενο b μετατοπίζονται, πάνω σε αυτές τις ευθείες, προς μικρότερες τιμές του $|\xi|$. Όταν το b γίνεται κάπως μεγάλο, ώστε το ξ_p να μην είναι τόσο πολύ μεγάλο σε σχέση με το ω_0 , δηλαδή το σαγματικό σημείο πλησιάζει το σημείο διακλάδωσης, τότε η προσέγγιση χάνει την ισχύ της. Κανείς μπορεί να δείξει, ότι τα σαγματικά σημεία κατά την προσέγγισή των στο σημείο διακλάδωσης, όπως παριστάνεται διαγραμματικά στο Σχήμα 2-7, εγκαταλείπουν την ευθεία $\eta = -2\gamma$.

Για πολύ μικρούς χρόνους, το b ($\theta \cong 1$), εκτός από αυτά τα δύο σαγματικά σημεία, δίδει ακόμη δύο επιπλέον επί του μιγαδικού άξονα εκατέρωθεν της αρχής των αξόνων

και τα οποία με αυξανόμενο χρόνο πλησιάζουν τον πραγματικό άξονα. Είναι αυτά, τα οποία για κάπως μεγάλους χρόνους θ τα βρήκαμε κοντά στην αρχή των αξόνων, στη περίπτωση Α 1. Η ακριβής των θέση δεν είναι σημαντική.

Τάξη μεγέθους

Σε αυτή τη θέση, είναι καιρός να κάνουμε παραδοχές σχετικά με την τάξη μεγέθους των επιμέρους μεγεθών που υπεισέρχονται στις εκφράσεις μας.

Το βάθος, που διατρέχεται εντός του διασπείροντος μέσου, το παίρνουμε ίσο με

$$x = 1 \text{ cm}$$

Το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας έστω ότι μετρήθηκε στον αέρα ίσο με

$$\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

Οπότε η συχνότητά του ισούται

$$\nu = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{2 \cdot 10^{11} \text{ cmrad}}{5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}} = 4 \cdot 10^{15} \text{ rad}$$

Την ιδιοσυχνότητα του μέσου την παίρνουμε ίση με

$$\omega_0 = 10 \omega = 4 \cdot 10^{16} \text{ rad}$$

Για τον δείκτη διαθλάσεως στη συχνότητα ω θεωρούμε:

$$n = 1,5$$

Αυτά τα δεδομένα, σε συνδυασμό με την θεώρηση μηδενικής απόσβεσης ($\gamma = 0$), μας επιτρέπουν τον υπολογισμό της τάξης μεγέθους του α^2 . Από την εξίσωση (2') είναι

$$n^2 = 1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - \nu^2}$$

$$a^2 = (n^2 - 1) \left[\left(\frac{\omega_0}{\nu} \right)^2 - 1 \right] \nu^2 = 1,25 \cdot 99 \cdot \nu^2 = 1,24 \cdot \omega_0^2$$

δηλαδή, περίπου $\alpha = \omega_0$. Από αυτό

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + a^2} = 1,5 \cdot \omega_0 = 6 \cdot 10^{16}$$

Ο συντελεστής A είχε ορισθεί ως

$$A = \frac{a^2}{2\omega_0^3\omega_2} \simeq \frac{a^5}{3\omega_0^4} \quad A \simeq \frac{1}{5} 10^{-33}$$

Θα ήθελα να δώσω ορισμένα δεδομένα σχετικά με την τάξη μεγέθους του συντελεστή γ σύμφωνα με τον Goldhammer, στο Dispersion und Absorption des Lichtes². Εκεί βρίσκει κανείς δεδομένα για την λογαριθμική απομείωση Γ για ορισμένα υλικά. Αυτή η απομείωση σχετίζεται με τη δική μας παράμετρο γ με τη σχέση

$$\gamma = \frac{\Gamma\omega}{2\pi}$$

Πειράματα σε ηωσίνη και φουξίνη έδωσαν

$$\Gamma = 0,45$$

Για τον υδράργυρο είναι $\Gamma = 0,8$, για ατμούς ιωδίου το Γ είναι πολύ μικρό (βλέπε σελίδα 57 αναφοράς). Ο επόμενος πίνακας δίδει τις αντίστοιχες τιμές του γ για επιμέρους τιμές του Γ .

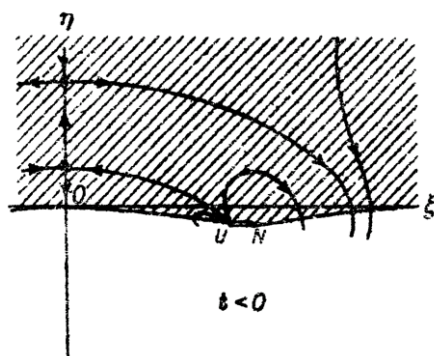
Γ	0,06	0,5	0,45	0,6	0,9
γ/ω_0	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$1,5 \cdot 10^{-1}$

Για όλες τις συνηθισμένες περιπτώσεις το γ^2 είναι πολύ μικρότερο από ω_0^2 , περίπου

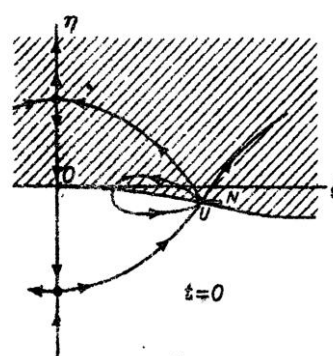
$$\gamma^2 = 5 \cdot 10^{-3} \omega_0^2$$

§4. Διαδοχική μετατόπιση των σαγματικών σημείων με τον χρόνο. Επιλογή του δρόμου ολοκληρώσεως

Τα επόμενα σχήματα μας παρέχουν μια άποψη του μιγαδικού επιπέδου για διάφορες χρονικές στιγμές. Απεικονίζεται μόνο το ημιεπίπεδο, αλλά όμως κανείς βλέπει εύ-



Σχήμα 2-8



Σχήμα 2-9

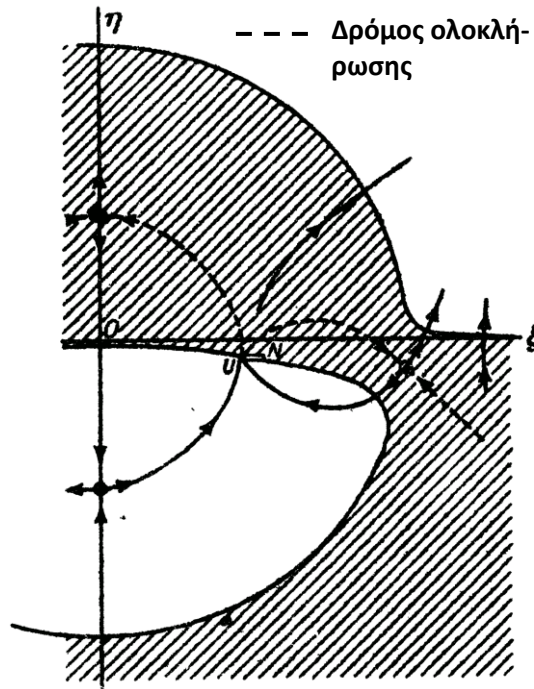
² Goldhammer, "Dispersion und Absorption des Lichtes", Leipzig 1913.

κολα, ότι δύο σημεία $\omega = \pm\xi + i\eta$, τα οποία κείνται συμμετρικά ως προς τον μιγαδικό άξονα, αντιστοιχούν στις τιμές $v = X \pm iY$, και συνεπώς το σχήμα είναι συμμετρικό ως προς τον μιγαδικό άξονα. Στις γραμμοσκιασμένες περιοχές το X είναι αρνητικό. Έχουν σχεδιασθεί οι σπουδαιότερες καμπύλες μέγιστης κλίσης. Αυτές ξεκινούν από τα σημεία όπου το X είναι άπειρο αρνητικό μέχρι τα σημεία όπου το X γίνεται άπειρο θετικό. Αυτά τα σημεία είναι τα δύο U σημεία (εκτός για $t = 0$) και το άπειρα απομακρυσμένο σημείο πάνω στον φανταστικό άξονα. Υπενθυμίζονται οι σχέσεις

$$\Theta = \frac{ct}{x} \quad t - \frac{x}{c} = t$$

$$\Theta - 1 = \flat \quad \frac{x}{c} \flat = t$$

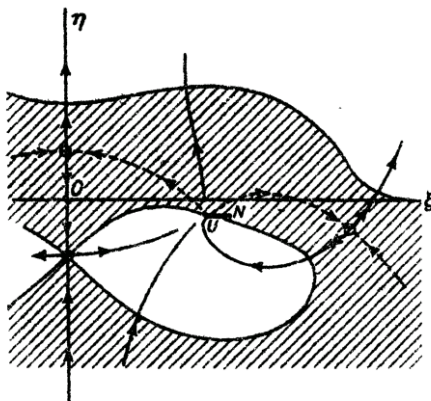
Για $t < x/c$ επικρατεί ηρεμία και συνεπώς το ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Οι πρώτοι προπομποί του σήματος αφικνούνται με την ταχύτητα c , δηλαδή για $t = 0$ (βλέπε Sommerfeld 1 c).



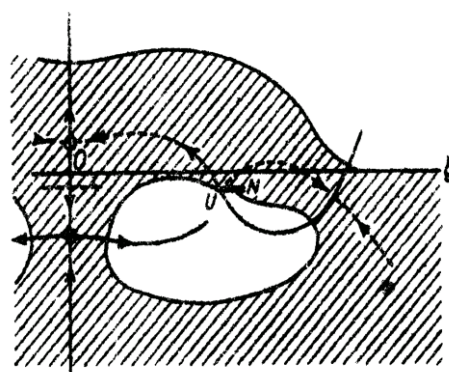
Σχήμα 2-10

Το Σχήμα 2-8 απεικονίζει το μιγαδικό επίπεδο για $t < 0$. Ο δρόμος ολοκλήρωσης μπορεί να παραμορφωθεί στη διεύθυνση του φανταστικού άξονα έως το άπειρο. Το ολοκλήρωμα μηδενίζεται, επειδή εκεί το X είναι άπειρο αρνητικό.

Για τη χρονική στιγμή $t = 0$, την οποία απεικονίζει το Σχήμα 2-9, ο κύκλος με άπειρη ακτίνα αποτελεί ένα μέρος της καμπύλης $X = 0$. Και εδώ μπορεί κανείς να παραμορ-



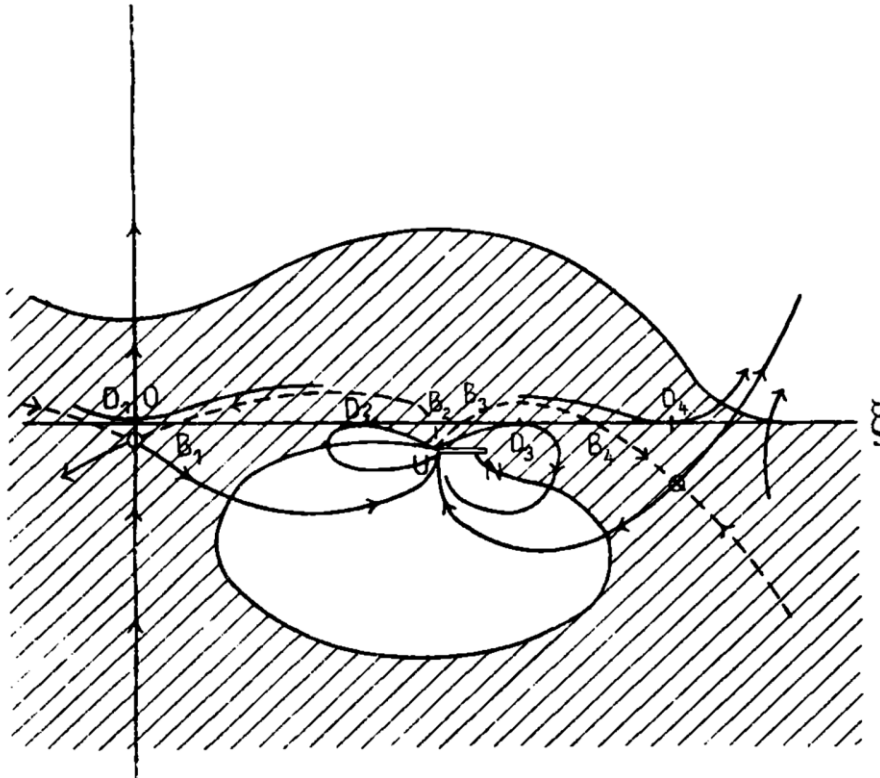
Σχήμα 2-11



Σχήμα 2-12

φώσει τον δρόμο ολοκληρώσεως προς τα πάνω έως το άπειρο και το ολοκλήρωμα μηδενίζεται, όχι όμως εκθετικά αλλά λόγω του παράγοντα $1/(\omega - \nu)$

Για τις χρονικές στιγμές $t > 0$, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 2-10 έως το Σχήμα 2-14 μπορεί να δει κανείς τις μεταβολές στο μιγαδικό επίπεδο. Από μια περιοχή, όπου το X παίρνει μεγάλες αρνητικές τιμές καταλήγει κανείς δια μέσου ενός σαγματι-



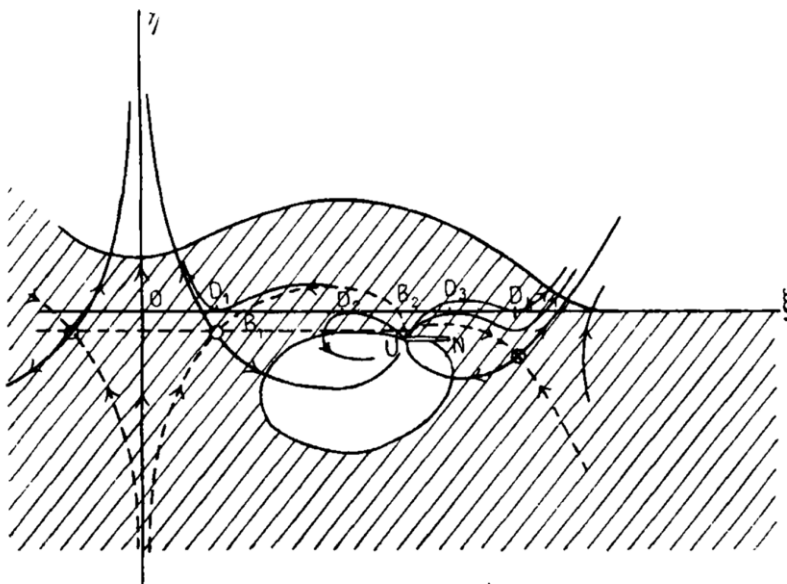
Σχήμα 2-13

κού πεδίου σε μια παρόμοια τέτοια περιοχή. Θα παραμορφώσουμε τον δρόμο ολοκληρώσεως κατά τέτοιο τρόπο, ώστε αυτός να διέρχεται από τέτοιες περιοχές, δηλαδή όπου το ολοκλήρωμα πρακτικά γίνεται μηδενικό. Οπότε παραμένει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μόνο στη γειτονιά των σαγματικών σημείων και μάλιστα καλύτερα είναι να επιλέγει κανείς ως δρόμους ολοκληρώσεως καμπύλες μέγιστης κλίσης που διέρχονται από το σαγματικό σημείο. Αυτός ο δρόμος ολοκληρώσεως υποδηλώνεται στα σχήματα και η μεταβολή του μπορεί εύκολα να παρακολουθηθεί με τον χρόνο.

Αν τα σαγματικά σημεία δεν βρίσκονται αρκετά κοντά στις τομές UN ή στο σημείο $\omega = \nu$, τότε στη γειτονιά των σαγματικών σημείων η ολοκλήρωση γίνεται προσεγγιστικά. Κανείς μπορεί να αντικαταστήσει το δρόμο ολοκληρώσεως από μια εφαπτομένη του στο σαγματικό σημείο και να θεωρήσει τον παράγοντα $1/(\omega - \nu)$ ως σταθερό, οπότε καταλήγει στον υπολογισμό στοιχειωδών ολοκληρωμάτων (βλέπε § 5). Υπό τους δεδομένους περιορισμούς, η ολοκλήρωση δίδει εκφράσεις που αντιστοιχούν στους

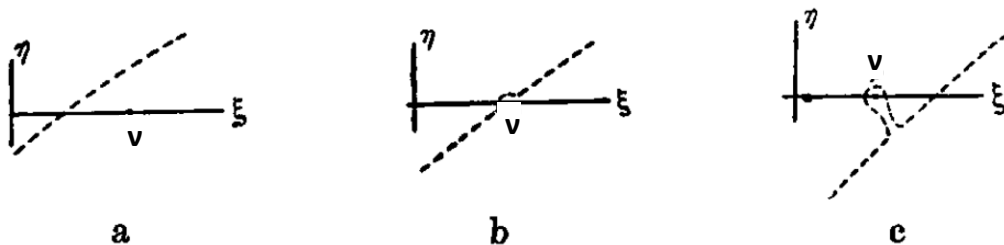
προπομπούς που το πλάτος των είναι εξαιρετικά μικρό σε σύγκριση με το τελικό πλάτος του σήματος.

Τώρα, θα θέλαμε να δούμε τι συμβαίνει όταν ο δρόμος ολοκλήρωσης πλησιάζει το σημείο $\omega = \nu$, (ν πραγματικό). Θεωρούμε ότι το σημείο βρίσκεται μεταξύ της αρχής των αξόνων και της τομής διακλαδώσεως, $0 < \nu < \omega_0$. Αυτή είναι και η περίπτωση, που επιλέξαμε προηγουμένως για να υπολογίσουμε τις τάξεις μεγέθους των υπεισερχομένων μεγεθών. Είχαμε ένα σήμα στην ορατή περιοχή του φάσματος, το οποίο διαδίδεται σε ένα μέσο με ιδιοσυχνότητα στο υπεριώδες. Η αντίθετη περίπτωση $\nu > \omega_0$ θα έδινε εντελώς ανάλογα αποτελέσματα.



Σχήμα 2-14

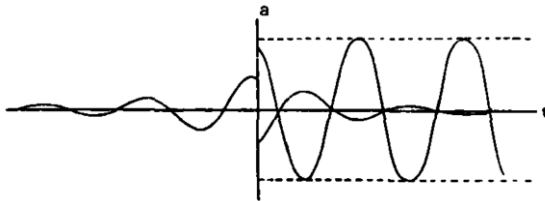
Με αυξανόμενο χρόνο ο δρόμος ολοκλήρωσης κατ' αρχάς διέρχεται πάνω και αριστερά από τον πόλο του ν , μετά περνά μέσα από αυτόν και τελικά καταλήγει δεξιά και κάτω απ' αυτόν. (βλέπε Σχήμα 2-15a, b, c). Στην πρώτη περίπτωση, η ολοκλήρωση



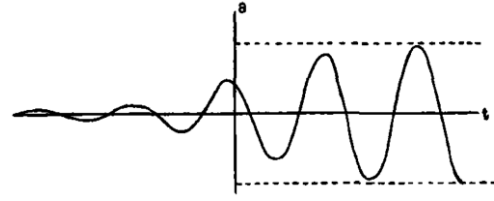
Σχήμα 2-15

(Σχήμα 2-15a) δίδει έναν ταλαντωτικό όρο, του οποίου το πλάτος αυξάνει έως περίπου το $\frac{1}{2}$ του τελικού πλάτους (Σχήμα 2-15 b). Εν συνεχεία, θα πρέπει να προσθέσει μια τα-

λανττική έκφραση σταθερού πλάτους ίσου με το τελικό πλάτος και η οποία προκύπτει από τον βρόχο περί το ν . Τέλος να προσθέσει μια έκφραση με αρνητικό πρόσημο της οποίας όμως το πλάτος φθίνει από $\frac{1}{2}$ του τελικού πλάτους έως πολύ μικρές τιμές και η οποία προκύπτει από το άλλο τμήμα του δρόμου ολοκληρώσεως. Το Σχήμα 2-16 παριστά γραφικά τις επιμέρους συνεισφορές και το Σχήμα 2-17 την επαλληλία των.



Σχήμα 2-16



Σχήμα 2-17

Στην πράξη, όταν ο δρόμος ολοκληρώσεως διατρέχει τη περιοχή πολύ κοντά στον πόλο, τα απομακρυσμένα τμήματα του δρόμου έχουν αμελητέα συνεισφορά. Αρκεί, να λάβουμε υπόψη μας μόνο την άμεση περιοχή περί τον πόλο. Τότε μπορεί κανείς στο ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{e^{-i(\omega t - kx)}}{\omega - \nu} d\omega$$

το $\omega t - kx$ να το θεωρήσουμε ως σταθερό ίσο με $\nu t - kx$, όπου (βλέπε (2.7))

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + i\kappa)$$

Αν ρ, θ είναι οι πολικές συντεταγμένες περί το ν έχουμε

$$\frac{d\omega}{\omega - \nu} = id\theta$$

Και για το ολοκλήρωμα έπεται

$$\Re \left(i e^{-i(\nu t - \frac{2\pi x}{\lambda})} \cdot e^{-\frac{2\pi\kappa}{\lambda}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int d\theta \right) = e^{-\frac{2\pi\kappa}{\lambda}} \sin(\nu t - \frac{2\pi x}{\lambda}) \frac{\theta}{2\pi}$$

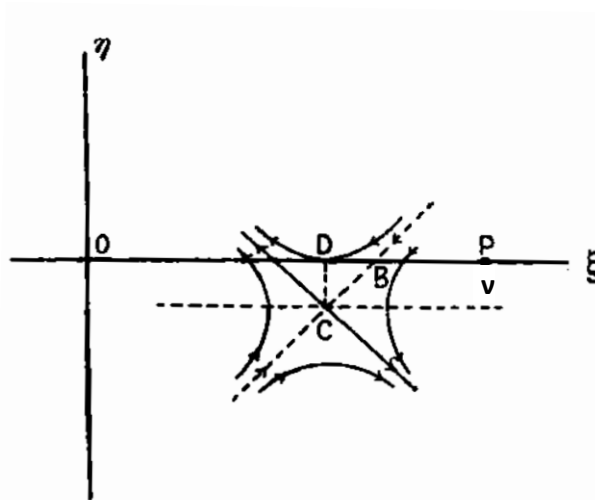
Για τον πλήρη βρόχο έχουμε $\theta/2\pi = 1$. Ο πρώτος παράγοντας παριστά την τελική ταλάντωση. Για τον δρόμο στο Σχήμα 2-15b έχουμε $\theta/2\pi = 1/2$, γεγονός που επιβεβαιώνει τους προηγούμενους ισχυρισμούς. Δεν θα παραθέσω την αναλυτική ολοκλήρωση

πλησίον του πόλου, η οποία και κοπιώδης είναι και δεν προσφέρει τίποτε επιπλέον από τις μόλις προγενόμενες παρατηρήσεις.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι **ακριβώς τη στιγμή που δρόμος ολοκληρώσεως συναντά τον πόλο, η ένταση της ταλάντωσης αυξάνει ραγδαία** και αποκτά την τάξη μεγέθους της τελικής ταλάντωσης, ενώ στα προηγούμενα ήταν πολύ μικρή (βλέπε παρακάτω τη τάξη μεγέθους των προπομπών). Αυτή τη χρονική στιγμή έχουμε την άφιξη του σήματος, η οποία και μας επιτρέπει να ορίσουμε την **ταχύτητα σήματος**. Γι' αυτήν θα δείξουμε, ότι ισούται με την ταχύτητα ομάδος, αν είμαστε μακριά από το σημείο διακλάδωσης, δηλαδή αν το σήμα έχει περίοδο πολύ διαφορετική από την ιδιοπερίοδο του μέσου.

Το σαγματικό σημείο C μετατοπίζεται με αυξανόμενο χρόνο προς τη διεύθυνση αυξανόμενου ξ (Σχήμα 2-18) επί μιας ευθείας που είναι παράλληλη προς τον πραγματικό άξονα και η οποία απέχει λίγο

από αυτόν. [το $CD = \frac{2}{3}\gamma$ είναι πολύ μικρότερο σε σχέση την τετμημένη ξ_p (βλέπε Σχήμα 2-5)]. Από τις καμπύλες μέγιστης κλίσης διαμέσου του σαγματικού σημείου οι οποίες βρίσκονται υπό γωνία 45° , η μία αποτελεί τον δρόμο ολοκληρώσεως. Αυτή τέμνει τον πραγματικό άξονα στο B . Αν σχεδιάσουμε τις καμπύλες μέγιστης κλίσης στη γειτονιά του σαγματικού σημείου, βλέπουμε ότι μία εφάπτεται του πραγματικού άξονα στο σημείο D , το οποίο έχει την ίδια τετμημένη όπως το σαγματικό σημείο C .



Σχήμα 2-18

Βάσει ορισμού, η χρονική στιγμή άφιξης του σήματος είναι αυτή κατά την οποία το σημείο B έρχεται στο σημείο P . Η απόσταση $DB = CD$ είναι πολύ μικρή. Θα δείξω, ότι το σήμα θα αφικνείται με μια ταχύτητα ακριβώς ίδια με την ταχύτητα ομάδος, αν ως άφιξη του σήματος ορίσουμε τη χρονική στιγμή που το σημείο D **συναντά** τον πόλο P .

Ουσιαστικά, πάνω στον πραγματικό άξονα (ω πραγματικό), $k = k_r + ik_i$, αν διαχωρίσουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος,

$$w = i(\omega t - kx) = -k_i x - i(\omega t - k_r x) = \frac{x}{c}(X + iY)$$

Στο D ο πραγματικός άξονας εφάπτεται σε μια γραμμή μέγιστης κλίσης του X ενώ η αντίστοιχη κάθετη σε αυτή είναι η ισοϋψής στο X .

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = 0 = -\frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

Οπότε

$$t - \frac{dk_r}{d\omega} x = 0$$

ή

$$t - \frac{x}{U} = 0$$

όπου U η ταχύτητα ομάδος. Η τετμημένη του πόλου P είναι ίση με v , τη συχνότητα του σήματος. U_v είναι η ταχύτητα ομάδος στη συχνότητα v . Ο πόλος προσεγγίζεται από το σημείο D τη στιγμή $t = x/U_v$, όπου x είναι απόσταση που διανύθηκε από το σήμα. Όριζε αυτή η χρονική στιγμή την άφιξη του σήματος, αυτό θα σήμαινε, ότι το σήμα διαδίδεται με τη ταχύτητα ομάδος.

Σχετικά με τη ταχύτητα διαδόσεως ενός σήματος του οποίου η συχνότητα εμπίπτει στη περιοχή του ανώμαλου διασκεδασμού βλέπε § 6.

Η ταχύτητα σήματος, συνεπώς, καθορίζει τη στιγμή άφιξης του σήματος με σημαντικό πλάτος, ενώ η ταχύτητα φάσεως προσδιορίζει μόνο τη διάταξη των φάσεων εντός του σήματος. (Βλέπε Sommerfeld § 4).

§5. Οι προπομποί

Στις προηγούμενες παραγράφους υπολογίσαμε τη θέση των σαγματικών σημείων και δείξαμε το πως τα διατρέχει ο δρόμος ολοκληρώσεως. Τώρα θα εκτελέσουμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος πλησίον των σαγματικών σημείων. Ενώ η διέλευση του δρόμου ολοκληρώσεως από τον πόλο μας έδωσε την ταχύτητα σήματος, η ολοκλήρωση στη γειτονιά των σαγματικών σημείων θα μας δώσει όρους μικρότερης τάξης, τους προπομπούς, των οποίων η ένταση είναι πολύ ασθενικότερη συγκρινόμενη με αυτή του σήματος. Θα εκτελέσουμε τον υπολογισμό με την ίδια σειρά με την οποία προσδιορίσαμε στην §3 τη θέση των σαγματικών σημείων.

A. Η περιοχή κοντά στην αρχή των αξόνων

Περίπτωση A 1:

Για $b' < \frac{4}{3}A\gamma^2$ βρήκαμε δύο σαγματικά σημεία που κείνται πάνω στον μιγαδικό άξονα. Ο δρόμος ολοκλήρωσης διέρχεται από το σαγματικό σημείο με τεταγμένη (βλέπε εξίσωση (2.13) και Σχήμα 2-4)

$$\eta_p = -\frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{3}\sqrt{4\gamma^2 - \frac{3b'}{A}}$$

παράλληλα προς τον πραγματικό άξονα. Αν ξ συμβολίζει ένα μικρό πραγματικό μέγεθος, θέτομε

$$\omega = i\eta_p + \xi$$

και στη γειτονιά του σαγματικού σημείου αναπτύσσομε τη συνάρτηση (2.12). Οι όροι πρώτης τάξεως μηδενίζονται (καθόσον $dv/d\omega = 0$ στο σαγματικό σημείο) και οι όροι δευτέρας τάξεως είναι πραγματικοί, καθόσον παραμένομε πάνω σε καμπύλη μέγιστης κλίσης του X (δηλαδή πάνω σε μια καμπύλη όπου $Y = \text{σταθερό}$). Οπότε βρίσκομε

$$\begin{aligned} v &= v_p - B\xi^2 \\ v_p &= \eta_p(b' + A\eta_p(\eta_p + 2\gamma)) \\ B &= A(3\eta_p + 2\gamma) \end{aligned}$$

και v_p η τιμή της συναρτήσεως v στο σαγματικό σημείο που είναι πραγματική, $v_p = X_p$, $Y_p = 0$, το οποίο και θα χρησιμοποιήσομε παρακάτω. Αυτό το αποτέλεσμα είναι εύκολα κατανοητό και ισχύει επίσης και για σαγματικά σημεία σε μεγάλη απόσταση, για τα οποία η προσεγγιστική έκφραση (2.11) θα ήταν μη ακριβής. Δηλαδή, το σαγματικό σημείο κείται πάνω στον μιγαδικό άξονα, η καμπύλη μέγιστης κλίσης, την οποία χρησιμοποιούμε ως δρόμο ολοκληρώσεως, το διαπερνά και είναι συμμετρική ως προς τον μιγαδικό άξονα. Όμως, πάνω σε αυτή την καμπύλη, από τη μια πλευρά, το Y παραμένει σταθερό (§ 1) και από την άλλη, για σημεία συμμετρικά ως προς τον φανταστικό άξονα, παίρνει την αντίθετες τιμές (βλέπε αρχή § 4), οπότε υποχρεωτικά $Y = 0$.

Τώρα μπορούμε να υπολογίσομε το ολοκλήρωμα f στη γειτονιά του σαγματικού πεδίου.

$$(2.18) \quad f = \frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{e^{\frac{x}{c}v}}{\omega - \nu} d\omega = \frac{e^{\frac{x}{c}v_p}}{2\pi} \int \frac{e^{-\frac{x}{c}B\xi^2}}{\omega - \nu} d\xi$$

Για να είναι επιτρεπτή η προσεγγιστική μέθοδος, θα πρέπει τα όρια $\pm\varepsilon$, μεταξύ των οποίων λαμβάνεται το ολοκλήρωμα, να είναι μικρά αναφορικά με άλλα μεγέθη του ω — επιπέδου, για παράδειγμα ω_0 . Στο τέλος της § 3 δείξαμε, ότι είναι αποδεκτές οι παρακάτω τάξεις μεγέθους

$$\nu = 4 \cdot 10^{15} \quad \omega_0 = 4 \cdot 10^{16} \quad A = \frac{1}{5} 10^{-33}$$

Από την άλλη πλευρά, η προσεγγιστική έκφραση για τον δείκτη διαθλάσεως απαιτεί, ότι στο σαγματικό πεδίο το η_p^2 είναι πολύ μικρότερο του ω_0^2 . Υποθέτοντας $\eta_p = 2 \cdot 10^{-2}\omega_0 \sim 10^{15}$, βρίσκομε

$$B = 3A\eta_p = \frac{3}{5}10^{15-33} = \frac{3}{5}10^{-18}$$

$$\frac{x}{c}B = x \frac{3}{3 \cdot 5}10^{-18-10} = 2x \cdot 10^{-29}$$

Συνεπώς η προσέγγιση θα ισχύει αν μπορεί να βρεθεί ένα ε μικρότερο από το ω_0 , για το οποίο η εκθετική συνάρτηση $e^{-\frac{x}{c}B\varepsilon^2}$ να είναι πρακτικά μηδέν. Για αυτό αρκεί να θεωρήσουμε

$$\frac{x}{c}B\varepsilon^2 = 5$$

Αν θέσουμε για το διάστημα που διανύθηκε από το φως $x = 1cm$ αυτό απαιτεί ένα ε

$$2\varepsilon^2 \cdot 10^{-29} = 5 \quad \varepsilon^2 = 25 \cdot 10^{29}$$

$$\varepsilon = 5 \cdot 10^{14} \simeq \frac{\omega_0}{100}$$

Για ένα βάθος $x = 100 cm$ βρίσκει κανείς $\varepsilon = 5 \cdot 10^{13} = \omega_0/1000$. Αυτές οι τιμές λοιπόν είναι επιτρεπτές για τον υπολογισμό μας.

Εντός αυτών των ορίων το $\omega - \nu$ θεωρείται σταθερό

$$\frac{1}{\omega - \nu} = \frac{1}{i\eta_p - \nu} = -\frac{\nu + i\eta_p}{\nu^2 + \eta_p^2}$$

και συνεπώς απομένει να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{-\frac{x}{c}B\varepsilon^2} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \cdot c}{Bx}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\pi Bx}}$$

και αν λάβουμε το πραγματικό μέρος της (2.18) τελικά θα έχουμε

$$f = \frac{\nu}{2(\nu^2 + \eta_p^2)} \sqrt{\frac{c}{\pi Bx}} e^{\frac{x}{c}\nu_p}$$

Ας διερευνήσουμε την τάξη μεγέθους του f και τη μεταβολή του με το χρόνο. Η ρίζα είναι της τάξεως $4 \cdot 10^{14}/3$ και αυξάνεται αργά. Ο πρώτος παράγοντας είναι της τάξεως $1/(2\nu)$ δηλαδή περίπου $10^{-15}/8$. Το γινόμενο των δύο παραγόντων είναι της τάξεως του $1/60$ και αυξάνει με τον χρόνο. Μένει να διερευνήσουμε το πως συμπεριφέρεται ο εκθέτης. Έχουμε

$$\frac{x}{c}\nu_p = \frac{x}{c}[\eta_p \delta' + A\eta_p^2(\eta_p + 2\gamma)]$$

όπου

$$\eta_p = -\frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{3}\sqrt{4\gamma^2 - \frac{3b'}{A}}$$

Συνεπώς το η_p είναι της τάξεως $\sqrt{\frac{|b'|}{3A}}$. Αυτό δίδει

$$\frac{x}{c}v_p = \frac{2}{3}\frac{x}{c}\eta_p b'$$

Αυτό είναι ένα αρνητικό μέγεθος μεγάλης απόλυτης τιμής ($(x/c)b' < 0$, η_p μεγάλο), το οποίο για $b' = 0$ τείνει στο μηδέν. Η διερεύνησή μας δεν δίνει την ακριβή μεταβολή του για $b' = 0$.

Συνολικά, η συνάρτηση f αρχικά είναι περίπου μηδενική, εν συνεχεία αυξάνεται για να πάρει εκ νέου, για $b' = 0$ την ακόμη μικρότερη τιμή

$$f_{b'=0} = \frac{1}{2\omega_0} \sqrt{\frac{c}{2\pi\gamma x A}}$$

Την τιμή της f για χρόνο $b' \cong 4A\gamma^2/3$ δεν θα την υπολογίσω καθόσον εδώ λαμβάνει χώρα μια σταδιακή μετάπτωση της μη ταλαντωτικής συνάρτησης που βρήκαμε σε μια ταλαντωτική συνάρτηση, την οποία θα βρούμε για $b' > 4A\gamma^2/3$. Τέλος η f διατηρεί την τάξη μεγέθους της όπως για $f_{b'=0}$.

Περίπτωση A 2:

Αν $b' > \frac{4}{3}A\gamma^2$ τότε έχουμε δύο σαγματικά σημεία, συμμετρικά ως προς τον φανταστικό άξονα (βλέπε Σχήμα 2-5 και εξίσωση (2.14))

$$\omega = -i\frac{2}{3}\gamma \pm \xi_p$$

Ο δρόμος ολοκλήρωσης δια μέσου αυτών έχει τη διεύθυνση των δύο ευθειών υπό γωνία 45° . Συνεπώς πλησίον των σαγματικών σημείων θέτομε

$$\omega = -i\frac{2}{3}\gamma \pm \xi_p + (1 \pm i)\varepsilon$$

Και από αυτό

$$d\omega = (1 \pm i)d\varepsilon = \sqrt{2} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} d\varepsilon$$

Όπως, και στην ήδη μελετηθείσα περίπτωση, στη γειτονιά του σαγματικού σημείου ο εκθέτης v παίρνει τη μορφή.

$$v = v_p - C\varepsilon^2$$

Και κανείς βρίσκει

$$\begin{aligned} v_p &= -b' \left(\frac{2}{3} \gamma \pm i \xi_p \right) + iA (\pm \xi_p - i \frac{2}{3} \gamma)^2 \cdot (\pm \xi_p + i \frac{4}{3} \gamma) \\ v_p &= X_p \pm i Y_p & C &= 6A \xi_p \\ X_p &= \frac{2}{3} \gamma (-b' + \frac{8}{9} A \gamma^2) & Y_p &= \xi_p \left(-b' + A (\xi_p^2 + \frac{4}{3} \gamma^2) \right) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα πρέπει να σχηματίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi} \Re \int \frac{e^{\frac{x}{c} \omega}}{\omega - \nu} d\omega$$

στην άμεση γειτονία του εν λόγω σαγματικού σημείου. Ο συντελεστής C έχει την ίδια τάξη μεγέθους όπως και στην προηγούμενη περίπτωση ο συντελεστής B . Σε πρώτη προσέγγιση τον παράγοντα $1/(\omega - \nu)$ τον θεωρούμε, για κάθε ολοκλήρωμα που αναφέρεται στα δύο θεωρούμενα σαγματικά σημεία, σταθερό και τον θέτουμε, όπως και τον παράγοντα $e^{\frac{x}{c} \nu}$ μπροστά από το ολοκλήρωμα. Τελικά, για το πρώτο ή το άλλο σαγματικό σημείο, παραμένει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \int_{+a}^{-a} e^{-\frac{x}{c} C \varepsilon^2} d\varepsilon$$

όπου a είναι ένα μικρό μέγεθος. Λαμβάνοντας υπόψη το μέτρο του C , το ολοκλήρωμα έχει την ίδια τιμή ωσάν το a ήταν άπειρο, δηλαδή

$$-\frac{1}{2\pi} \sqrt{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{c}{Cx}} = -\frac{1}{2} e^{\pm i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{c}{3\pi \xi_p x A}}$$

όπου το C έχει αντικατασταθεί με την έκφρασή του. Συνεπώς, συνολικά, η ολοκλήρωση πλησίον του σαγματικού σημείου δίδει

$$f = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{3\pi \xi_p x A}} \Re \left\{ \frac{e^{\frac{x}{c}(X_p + iY_p)}}{-i \frac{2}{3} \gamma + \xi_p - \nu} e^{+i \frac{\pi}{4}} + \frac{e^{\frac{x}{c}(X_p - iY_p)}}{-i \frac{2}{3} \gamma - \xi_p - \nu} e^{-i \frac{\pi}{4}} \right\}$$

η οποία μετά μερικούς μετασχηματισμούς δίδει τελικά

$$(2.19) \quad f = \frac{\nu \sqrt{\frac{c}{3\pi\xi_p xA}} e^{\frac{x}{c}X_p}}{\left(\nu^2 + \xi_p^2 + \frac{4}{9}\gamma^2\right)^2 - 4\nu\xi_p^2} \left\{ \left(\nu^2 - \xi_p^2 + \frac{4}{3}\gamma^2 \right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{c}Y_p\right) \right. \\ \left. + \frac{4}{3}\gamma\xi_p \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{c}Y_p\right) \right\}$$

Ο εκθέτης $(x/c)X_p$ είναι αρνητικός και η απόλυτος τιμή του αυξάνει με τον χρόνο περίπου όπως το $+(2/3)(x/c)\gamma b' = +(2/3)\gamma t'$. Το μέγεθος του $e^{(x/c)X_p}$, το οποίο αρχικά ($b' = 0$) είναι περίπου 1 σταδιακά μειώνεται και τείνει στο μηδέν όταν τα σαγματικά σημεία τείνουν στα σημεία διακλαδώσεως. Και η ρίζα μεταβάλλεται με τον ίδιο τρόπο με το χρόνο. Τον άλλο παράγοντα, για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα τη συμπεριφορά του, θα τον απλοποιήσουμε κάπως, παραβλέποντας το γ^2 σε σχέση με το $\nu^2 - \xi_p^2$, το είναι πάντα επιτρεπτό εκτός και αν το σαγματικό σημείο βρίσκεται κοντά στον πόλο ν . Τότε κανείς βρίσκει

$$(19') \quad f = \frac{\nu}{\nu^2 - \xi_p^2} \sqrt{\frac{c}{3\pi\xi_p xA}} e^{\frac{x}{c}X_p} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{c}Y_p\right) \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \frac{\gamma\xi_p}{\nu^2 - \xi_p^2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{c}Y_p\right) \right\}$$

Κανείς βλέπει, ότι, γενικά, ο \cos – όρος υπερτερεί. Όμως, όταν το σαγματικό σημείο προσεγγίζει τον πόλο προκύπτει μια μεταβολή στη φάση οπότε ο \sin – όρος δεν μπορεί να παραληφθεί. Ο παράγοντας $\nu/(\nu^2 - \xi_p^2)$, ο οποίος γενικά είναι της τάξεως του $1/\nu$, συνεπώς πολύ μικρό, γίνεται πολύ μεγάλος όταν το σαγματικό σημείο προσεγγίζει τον πόλο.

Θα ήθελα να προσδιορίσω εκείνη τη στιγμιαία συχνότητα $\omega = 2\pi/T$ της ταλάντωτικής κίνησης η οποία πράγματι προσδιορίζεται ως η χρονική παράγωγος της φάσεως, τουλάχιστον όταν υπερτερεί ο \cos – όρος, δηλαδή το ξ_p διαφέρει αισθητά από το ν .

$$\omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{c}Y_p \right) = \frac{dY_p}{d\theta} = \frac{dY_p}{db'}$$

έτσι

$$\xi_p^2 = \frac{1}{9} \left(\frac{3b'}{A} - 4\gamma^2 \right) = \frac{b'}{3A}$$

εφόσον το γ^2 μπορεί να παραληφθεί ως προς το b'/A . Οπότε

$$Y_p = -\frac{2}{3} \xi_p b' = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{b'^{3/2}}{A^{1/2}}$$

$$\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{b'^{1/2}}{A^{3/2}} = -\xi_p$$

Η στιγμιαία λοιπόν συχνότητα ισούται με την τετμημένη ξ_p του σαγματικού σημείου, δηλαδή, με βάση τα παραπάνω (βλέπε τέλος § 4), είναι ίση με τη συχνότητα μιας ημιτονοειδούς κίνησης, της οποίας η ταχύτητα ομάδος είναι x/t .

Υπολογίζομε την τάξη μεγέθους του πλάτους της ταλάντωσης θεωρώντας πάλι τις ίδιες τάξεις μεγέθους που θεωρήσαμε και στην προηγούμενη περίπτωση

$$\xi_p = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \omega_0 = 10^{15}$$

$$C = 2B, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{c} C = 2x \cdot 10^{-29}$$

Το πλάτος, εκτός από τον εκθετικό παράγοντα, έχει τιμή

$$\frac{1}{v} \sqrt{\frac{2c}{\pi C x}} = \frac{1}{30}$$

Οι προπομποί έχουν λοιπόν ένα πλάτος της τάξεως του $1/30$, δηλαδή η έντασή των είναι τάξεως $1/1000$ αυτής του σήματος. Αυτή η ένταση, βέβαια, εξαρτάται άμεσα από την φασματική κατανομή της εντάσεως στο αρχικού σήματος. Στη πράξη, στο πλάτος της θεωρούμενης ταλάντωσης εμφανίζεται ο παράγοντας

$$\frac{v}{v^2 - \xi_p^2}$$

ο οποίος, πέραν του αριθμητικού παράγοντα $-1/\pi$, παριστά το πλάτος της ταλάντωσης συχνότητας ξ_p του αρχικού σήματος (βλέπε Sommerfeld § 2):

$$\frac{v}{v^2 - \xi_p^2} = -\pi \frac{2}{\tau} \cdot \frac{1}{\xi_p^2 - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2}$$

Την έκφραση (19') μπορούμε να τη γράψομε και σε μια μορφή, όπου εμφανίζονται μόνον τα μεγέθη x και t' . Αυτή η μορφή όμως ισχύει προσεγγιστικά για σαγματικά σημεία, τα οποία δεν βρίσκονται πλησίον της αρχής των αξόνων και του πόλου v . Χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραχθείσα προσεγγιστική έκφραση

$$\xi_p = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{b'}{3A}} = \sqrt{\frac{ct'}{3Ax}}$$

Βρίσκομε

$$(19'') \quad f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{c}{3Ax t'} \right)^{1/4} \frac{v}{v^2 - \frac{ct'}{3Ax}} e^{-\frac{2\gamma}{3} t'}$$

$$\cdot \left\{ \cos \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{c}{3Ax}} t'^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{4}{3} \gamma \sqrt{\frac{ct'}{3Ax}} \frac{1}{v^2 - \frac{ct'}{3Ax}} \sin \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{c}{3Ax}} t'^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

Η ολοκλήρωση, λοιπόν, πλησίον σαγματικών σημείων που βρίσκονται κοντά στην αρχή των αξόνων μας οδηγεί σε μια ταλαντωτική κίνηση με τα παρακάτω χαρακτηριστικά. Για χρονικές στιγμές έως πλησίον $t' = b'x/c \cong 0$ ($t = x\omega_3/\omega_0c$) δεν έχουμε καμία κίνηση. Για t' σχεδόν μηδέν ($t' = 0$) μια ελαφρά απόκλιση. Μετά για, $t' > 0$, μια ταλαντωτική κίνηση πάρα πολύ μικρού πλάτους, της οποίας η συχνότητα αρχίζει να αυξάνεται από το μηδέν. Το πλάτος αυξάνει ραγδαία μόλις η συχνότητά αυτών των προπομπών πλησιάσει τη συχνότητα του σήματος. Το σήμα αφικνείται με την ταχύτητα ομάδος και παίρνει ταχύτατα το τελικό του πλάτος. Εξακολουθεί όμως να παραμορφώνεται για κάποιο χρόνο από τους προπομπούς, των οποίων όμως το πλάτος μειώνεται πολύ γρήγορα ενώ ταυτόχρονα συνεχίζει να αυξάνεται η συχνότητά των. Αν η συχνότητά των προσεγγίζει την ιδιοσυχνότητα των ταλαντούμενων ηλεκτρονίων στο μέσο, τότε το πλάτος της κινήσεών των γίνεται ασήμαντο.

Αυτά ισχύουν για την περίπτωση $0 < v < \omega_0$, δηλαδή για ένα σήμα στο ορατό και την ιδιοσυχνότητα των ηλεκτρονίων στο υπεριώδες.

Το τμήμα των προπομπών που μόλις βρήκαμε, θα το ονομάσω ως δεύτερους προπομπούς. Η ολοκλήρωση πλησίον σαγματικών σημείων τα οποία βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση θα μας δώσουν τους πρώτους προπομπούς.

B. Σαγματικά σημεία σε μεγάλη απόσταση

Είδαμε, ότι για πολύ μικρού χρόνου b' θα έπρεπε να λάβομε υπόψη μας ένα σαγματικό σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω στον φανταστικό άξονα καθώς επίσης και δύο ακόμη σημεία, συμμετρικά ως προς τον φανταστικό άξονα, στις θέσεις (βλέπε εξίσωση (2.17) και Σχήμα 2-7

$$\xi_p = \pm \frac{a}{\sqrt{2b}} \quad \eta_p = -2\gamma$$

Η ολοκλήρωση πλησίον του σαγματικού σημείου επί του φανταστικού άξονα συνεισφέρει πολύ λίγο, καθόσον είναι πολύ είναι ένα επίπεδο σαγματικό σημείο. Αυτό το

έχω ήδη επισημάνει (περίπτωση A 1), ότι δηλαδή το ολοκλήρωμα στη γειτονιά αυτού του σημείου μπορεί να παραληφθεί, εκτός και αν το σημείο βρίσκεται πολύ κοντά στην αρχή των αξόνων. Επίσης αναφέρθηκε, ότι πάνω στις καμπύλες μέγιστης κλίσης που διέρχονται από αυτό το σημείο, δηλαδή πάνω στο δρόμο ολοκλήρωσης, το ολοκλήρωμα μηδενίζεται.

Γιαυτό, θα ασχοληθούμε λοιπόν μόνο με τα άλλα δύο σαγματικά σημεία, για τα οποία ο δρόμος ολοκληρώσεως τα διαπερνά ως ευθεία υπό γωνία 45° . Επομένως, για την γειτονιά αυτών των σημείων θέτομε

$$\omega = -i2\gamma \pm \xi_p + (1 \mp i)\varepsilon$$

$$d\omega = (1 \mp i)d\varepsilon = \sqrt{2} e^{\mp i\frac{\pi}{4}} d\varepsilon$$

και για το ανάπτυγμα του ν

$$\nu = \nu_p - D\varepsilon^2 = -\gamma \frac{a^2}{\xi_p^2} \mp i \frac{a^2}{\xi_p} - \frac{a^2}{\xi_p^3} \varepsilon^2$$

Για αυτά τα σαγματικά σημεία θα πρέπει να επιλέξομε τις οριακές τιμές $\pm a$ στο ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi} \Re \int_{+a}^{-a} \frac{e^{\frac{x}{c}\omega}}{\omega - \nu} d\omega$$

έτσι ώστε το $e^{-(x/c)D\varepsilon^2}$ να μηδενίζεται σε αυτά τα όρια. Η προσεγγιστική μέθοδος ισχύει μόνον τότε, όταν το a μπορεί όντως να επιλεγεί τόσο μικρό αναφορικά με το ξ_p . Για το δείξομε αυτό στο με ένα αριθμητικό παράδειγμα, θέτομε

$$\xi_p = 10 \cdot \omega_0 \quad a = \omega_0 = 4 \cdot 10^{16}$$

$$D = \frac{a^2}{\xi_p^3} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-16} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-19} \quad \frac{x}{c} D = 10^{-30}$$

Η εκθετική συνάρτηση γίνεται πρακτικά μηδέν αν το $-(x/c)D\varepsilon^2$ επιλεγεί περίπου -10 , το οποίο απαιτεί

$$10^{-30} \cdot \varepsilon^2 = 10 \quad \Rightarrow \varepsilon = 3 \cdot 10^{15}$$

δηλαδή της τάξης μεγέθους του $\xi_p/100$, το οποίο είναι επιτρεπτό. Συνεπώς η προσέγγιση ισχύει εφόσον η τετμημένη ξ_p του σαγματικού σημείου είναι μεγαλύτερη του ω_0 , χωρίς όμως να παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, πράγμα που θα συνέβαινε για χρονικές στιγμές ή πολύ κοντά στο μηδέν (βλέπε εξίσωση (2.17)).

Τον παράγοντα $1/(\omega - \nu)$ τον θεωρούμε σταθερό και τον βγάζομε εκτός ολοκληρώματος, οπότε παραμένει να υπολογίσομε το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x a^2}{c \xi_p^3} \varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{c\pi \xi_p^3}{x}}$$

Ανάλογα, με το αν πρόκειται για το ένα ή το άλλο σαγματικό σημείο, αυτή η έκφραση αυτή η έκφραση πρέπει να πολλαπλασιασθεί με

$$\frac{\sqrt{2} e^{\mp i \frac{\pi}{4}} \cdot e^{-\frac{x}{c} v_p}}{\omega_p - \nu} = \frac{\sqrt{2} e^{-\gamma \frac{a^2 x}{\xi_p^2 c} \mp i \left(\frac{a^2 x}{\xi_p^2 c} + \frac{\pi}{4} \right)}}{-2i\gamma \pm \xi_p - \nu}$$

εν συνεχεία να σχηματίσει το άθροισμα των δύο όρων και να λάβει το πραγματικό μέρος, οπότε καταλήγει στην

$$(2.20) \quad f = -\sqrt{2} \frac{\nu}{a} \left(\frac{c}{\pi \xi_p x} \right)^{1/2} e^{-2\gamma t} \cos \left(\frac{a^2 x}{\xi_p^2 c} + \frac{\pi}{4} \right)$$

και αν κανείς αντικαταστήσει παντού αντί το ξ_p , μέσω της εξίσωσης (2.17), με το $t' > 0$ έχουμε

$$(20') \quad f = -\frac{\nu}{\sqrt{\pi a^3}} \left(\frac{2c}{x} \right)^{3/4} t^{1/4} e^{-2\gamma t} \cos \left(\sqrt{\frac{2x}{c}} t + \frac{\pi}{4} \right)$$

Οι πρώτοι προπομποί καταφθάνουν με ταχύτητα του φωτός στο κενό, καθόσον αυτοί αρχίζουν σε χρόνο $t' = t - (x/c)$. Η περίοδος των στην αρχή είναι πολύ μικρή και αυξάνει βαθμιαία. Αν ορίσομε, όπως και στη περίπτωση των δευτέρων προπομπών, μια στιγμιαία συχνότητα, βλέπει κανείς εύκολα, ότι αυτή, και εδώ για κάθε χρονική στιγμή, ότι είναι ίση με την τετμημένη ξ_p του σαγματικού σημείου. Το πλάτος αρχικά είναι μηδενικό, και, αν λάβει κανείς υπόψη του την εξασθένηση, μειώνεται όπως ο παράγοντας $t^{1/4} e^{-2\gamma t}$.

Για το επιλεγέν αριθμητικό παράδειγμα, βρίσκει κανείς ένα πλάτος της τάξεως $4 \cdot 10^{-3}$, ή μια ένταση της τάξεως του $4 \cdot 10^{-6}$.

Οι προσεγγίσεις που παρουσιάστηκαν εδώ χάνουν την ισχύ τους για πολύ μικρά t , δηλαδή για πολύ απομακρυσμένα σαγματικά σημεία. Οι πρώτοι προπομποί δίδονται λοιπόν από την έκφραση

$$f = \frac{\nu}{a} \sqrt{\frac{2ct}{x}} J_1 \left(2a \sqrt{\frac{xt}{2c}} \right)$$

όπως έδειξε ο Dr. Sommerfeld (βλέπε Sommerfeld εξίσωση(1.33)). Αν σε αυτή αντικαταστήσει τη συνάρτηση Bessel από την ασυμπτωτική της έκφραση βρίσκει την έκφραση (20'), για την οποία όμως δεν θα πρέπει να απαιτήσει την ισχύ της για πολύ μικρές τι-

μές του t . Ο παράγοντας $e^{-2\gamma t}$ απουσιάζει καθόσον η έκφραση του Sommerfeld παράχθηκε με την προϋπόθεση $\gamma = 0$. Επιστρέφοντας στις τάξεις μεγέθους που δόθηκαν στο τέλος της § 3, πείθεται κανείς εύκολα, ότι σε αυτά τα παραδείγματα το γ δεν μπορεί να αγνοηθεί συγκρινόμενο με το ω_0 .

§6. Ταχύτητα σήματος

Στις προηγούμενες παραγράφους υπολόγισα τους προπομπούς και έδειξα με αριθμητικά παραδείγματα, ότι η έντασή των είναι πολύ χαμηλή σε σχέση με αυτή του κυρίου σήματος. Τώρα θα ήθελα να ασχοληθώ με την ταχύτητα του σήματος. Προς το τέλος της § 4 αποδείχθηκε, ότι τη στιγμή που ο δρόμος ολοκλήρωσης συναντά τον πόλο το πλάτος της ταλαντωτικής κίνησης γίνεται αισθητό —της τάξεως του μισού του τελικού πλάτους. Συνεπώς μπορεί κανείς **αυθαίρετα να ορίσει ως άφιξη του σήματος τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο δρόμος ολοκλήρωσης συναντά τον πόλο ν** .

Όλοι αυτοί οι συλλογισμοί αναφέρονται για την περίπτωση που όπου το ν διαφέρει σημαντικά από το ω_0 , δηλαδή για την περίπτωση της ομαλής διασποράς. Φαίνεται όμως λογικό να διατηρήσουμε τον παραπάνω ορισμό για **όλες τις περιπτώσεις, ακόμη και για εκείνες που περίοδος του σήματος βρίσκεται στην περιοχή του ανώμαλου διασκεδασμού**.

Επειδή το ν ως φυσική συχνότητα είναι ένας πραγματικός και θετικός αριθμός, ο πόλος ν κείται πάντα επί του ξ — άξονος μεταξύ 0 και $+\infty$.

Αν σχεδιάσουμε το μιγαδικό επίπεδο για ένα σήμα, το οποίο παρατηρείται σε βάθος x τη χρονική στιγμή t (βλέπε Σχήμα 2-8 έως Σχήμα 2-14), το αποκτώμενο σχήμα θα εξαρτάται μόνο από το μέγεθος

$$\nu = -i\omega(\Theta - n) = X + iY$$

(βλέπε εξίσωση (2.4)), επίσης θα είναι ανεξάρτητο από τη συχνότητα ν του σήματος. Αυτή όμως είναι η ίδια και για ένα άλλο βάθος x' και μια άλλη χρονική στιγμή t' , τα οποία ικανοποιούν την απαίτηση (βλέπε εξίσωση 4α)

$$(2.21) \quad \Theta = \Theta' \quad \frac{tc}{x} = \frac{t'c}{x'}$$

Ο θετικός πραγματικός άξονας τέμνει τον δρόμο ολοκλήρωσης στα σημεία B_1, B_2, \dots με τετμημένες ν_1, ν_2, \dots (βλέπε π.χ., Σχήμα 2-13 και Σχήμα 2-14). Με βάση τον μόλις εισαχθέντα συμβολισμό, ένα σήμα συχνότητας ν_1 τη χρονική στιγμή t θα έχει μια σημαντική ένταση. Η σχέση (2.21) δείχνει, ότι ο χρόνος t είναι ανάλογος του βάθους x και συνεπώς το σήμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα S . Κανείς έχει

$$t = \frac{x}{S} \quad \Theta = \frac{ct}{x} = \frac{c}{S}$$

Ο ανηγμένος χρόνος Θ δίδει τον λόγο της ταχύτητας του φωτός στο κενό προς την ταχύτητα σήματος για την συχνότητα ν_1 . Το Σχήμα 2-10 έως το Σχήμα 2-14 δείχνουν την μετατόπιση των σημείων B_1, B_2, \dots με αυξανόμενο Θ . Αν στις τετμημένες ν_1, ν_2, \dots σχεδιάσει κανείς τις τεταγμένες $c/S = \Theta$, παίρνει την καμπύλη που παριστάνεται στο Σχήμα 2-19. Στα σημεία B αντιστοιχούν τα σημεία b τα οποία έχουν την ίδια τετμημένη.

Στην § 4 δείχθηκε, ότι για το σημείο D (Σχήμα 2-18) του μιγαδικού επιπέδου, στο οποίο μια γραμμή μέγιστης κλίσης στο x εφάπτεται του πραγματικού άξονα

$$t = \frac{x}{U} \quad \Theta = \frac{c}{U}$$

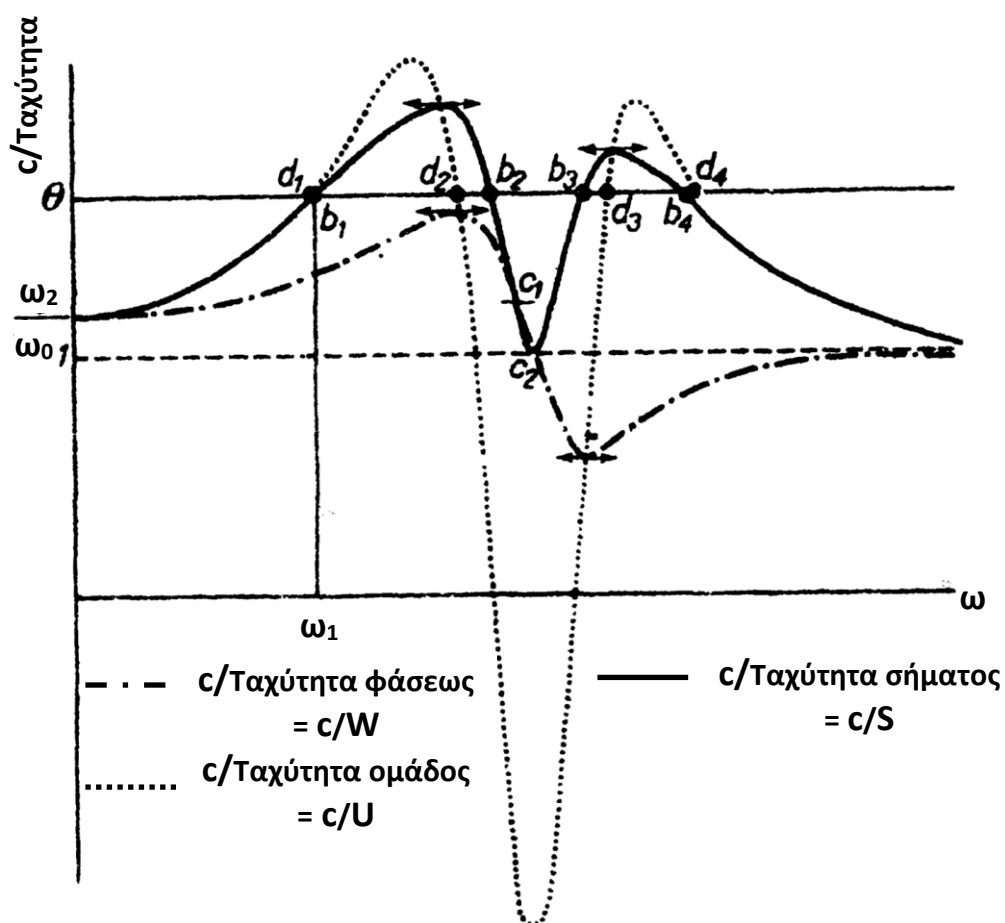
όπου U η ταχύτητα ομάδος για τη συχνότητα $\xi = OD$. Στο Σχήμα 2-19 απεικονίζεται η καμπύλη c/U . Στα σημεία D αντιστοιχούν τα σημεία d .

Στο Σχήμα 2-10 έως και το Σχήμα 2-14 μπορεί κανείς να σχεδιάσει το πλήρες δίκτυο των καμπυλών μέγιστης κλίσεως, να σημειώσει τη θέση των σημείων B και D και να βρει (βλέπε § 4 Σχήμα 2-18), ότι ένα σαγματικό σημείο, όχι και τόσο κοντά σε μια διακλάδωση, βρίσκεται πολύ πλησίον των δύο σημείων B και D , και τα οποία πάλι βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. (Για παράδειγμα, τα B και D στο Σχήμα 2-18, $B_1 D_1$ και $B_4 D_4$ στο Σχήμα 2-13, $B_1 D_1$ στο Σχήμα 2-14). Αυτό όμως σημαίνει, ότι μακριά από την περιοχή του ανωμάλου διασκεδασμού οι καμπύλες c/S και c/U συμπίπτουν και ότι η ταχύτητα σήματος ισούται με την ταχύτητα ομάδος (βλέπε τέλος § 4). Αυτό παύει να ισχύει όταν τα σαγματικά σημεία πλησιάζουν την τομή διακλάδωσης. Ακόμη όμως και τότε, η αντίστοιχη θέση των σημείων B και D μας δίδει πληροφορίες σχετικά με θέση της άγνωστης καμπύλης της ταχύτητας σήματος μέσω της γνωστής καμπύλης της ταχύτητας ομάδος.

Ο δρόμος ολοκληρώσεως κατ' αρχάς τέμνει τον πραγματικό άξονα σε δύο σημεία, τα B_3, B_4 , ενώ μεταξύ των βρίσκεται το σημείο D_3 (βλέπε Σχήμα 2-13). Για μια ορισμένη χρονική στιγμή αυτή εφάπτεται του πραγματικού άξονα οπότε τα σημεία B_3, B_4 και D_3 συμπίπτουν, όπως επίσης και τα σημεία b_3, b_4 και d_3 (Σχήμα 2-14). Αυτό σημαίνει, ότι τα μέγιστα της καμπύλης c/S συμπίπτουν με τα σημεία τομής των καμπυλών c/S και c/U .

Ο δρόμος ολοκληρώσεως που επιλέχθηκε, δηλαδή η καμπύλη μέγιστης κλίσης που διέρχεται από το σαγματικό σημείο, αποτελείται από αρκετά επιμέρους τμήματα, κάθε ένα από τα οποία διέρχεται μόνο από ένα σαγματικό σημείο (Σχήμα 2-10 έως Σχήμα 2-14).

- | | | |
|----------|----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. Τμήμα | $+\infty > \xi > \xi_\infty$ | Από $+\infty$ έως το σημείο U_1 |
| 2. Τμήμα | $\xi_\infty > \xi > -\xi_\infty$ | Από U_1 έως U_2 |
| 3. Τμήμα | $-\xi_\infty > \xi > -\infty$ | Από U_2 έως $-\infty$ |



Σχήμα 2-19

Για την περίπτωση Α 2 (§ 3), όπου

$$b' > \frac{4}{3} A\gamma^2 \text{ τα}$$

το τμήμα 2 διασπάται πάλι σε δύο μέρη (Σχήμα 2-13 και Σχήμα 2-14).

Το φανταστικό μέρος Y του εκθέτη ν παραμένει σταθερό κατά μήκος του δρόμο ολοκληρώσεως ο οποίος είναι μια καμπύλη μέγιστης κλίσης για X , δηλαδή για κάθε τμήμα,

$$Y = Y_p$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στη γειτονιά του σαγματικού σημείου στην § 5 έδωσα τις αντίστοιχες τιμές του Y :

1. Τμήμα: Σαγματικό σημείο σε μεγάλη απόσταση (§ 5 περίπτωση B):

$$Y_p = -\frac{a^2}{\xi_p} = -a\sqrt{ab}$$

2. Τμήμα: Σαγματικό σημείο πλησίον της αρχής των αξόνων:

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \text{Περίπτωση A 1: } & b' \leq \frac{4}{3} A\gamma^2, & Y_p &= 0 \\ \text{Περίπτωση A 2: } & b' > \frac{4}{3} A\gamma^2, & Y_p &= \xi_p(-b' + A(\xi_p^2 + \frac{4}{3}\gamma^2)) \cdot \\ & & & \left(\xi_p = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3b'}{A} - 4\gamma^2} \right) \end{aligned}$$

Τώρα θα πρέπει να υπολογισθούν τα σημεία B_2, B_3 , στα οποία ο δρόμος ολοκλήρωσής μας τέμνει τον πραγματικό άξονα κοντά στην τομή διακλάδωσης UN (Σχήμα 2-13). Πάνω στον πραγματικό άξονα (ω πραγματικό) από την (2.4) έχουμε

$$(2.23) \quad Y = -\omega(\Theta - n_r) = -\omega(\Theta - \frac{c}{V})$$

όπου n_r είναι ο δείκτης διαθλάσεως και V η ταχύτητα φάσεως για τη συχνότητα ω . Η καμπύλη $n_r = c/V$ είναι γνωστή και έχει σχεδιασθεί στο Σχήμα 2-19. Για να βρούμε τα σημεία B_2, B_3 απλά αρκεί να αναζητήσουμε τα σημεία του πραγματικού άξονα για τα οποία οι εκφράσεις (2.22) και (2.23) συμπίπτουν. Για την περίπτωση A 1, δηλαδή όταν

$$b' \leq \frac{4}{3} A\gamma^2, \quad \Theta \leq \frac{\omega_2}{\omega_0} + \frac{4}{3} A\gamma^2$$

το δεύτερο τμήμα του δρόμου μας ολοκλήρωσης απαιτεί $Y = 0$, συνεπώς τέμνει τον πραγματικό άξονα πλησίον της τομής διακλάδωσης στο σημείο για το οποίο

$$\Theta - \frac{c}{V} = 0 \quad \frac{c}{S} = \Theta = \frac{c}{V}$$

Για αυτές τις τιμές του Θ λοιπόν η καμπύλη c/S συμπίπτει ουσιαστικά με την καμπύλη c/V (βλέπε στο Σχήμα 2-19 το τμήμα από το c_1 έως το c_2).

Ιδιαίτερα, βλέπει κανείς ότι πλησίον του ω_0 υπάρχει μια συχνότητα (σημείο c_2) για την οποία το σήμα διαδίδεται με τη ταχύτητα του φωτός στο κενό και συνεπώς ο αντίστοιχος δείκτης διαθλάσεως n_r ισούται με τη μονάδα.

$$\frac{c}{V} = \frac{c}{S} = 1$$

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις (A 2 και B , στο Σχήμα 2-19 το τμήμα c_2 έως b_3) βρίσκεται πάνω στον δρόμο ολοκληρώσεως

$$Y < 0$$

και συνεπώς για τα σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα θα έχουμε

$$-\omega \left(\Theta - \frac{c}{V} \right) < 0 \quad \Theta - \frac{c}{V} > 0$$

συνεπώς

$$\frac{c}{S} > \frac{c}{V}$$

Δηλαδή, η καμπύλη c/S βρίσκεται πάνω από την καμπύλη c/V . Με βάση αυτά τα δεδομένα μπορεί κανείς να σχεδιάσει την καμπύλη c/S , την οποία θέλομε να μελετήσουμε.

Η ταχύτητα σήματος δεν διαφέρει από την ταχύτητα ομάδος, με εξαίρεση την περιοχή ανωμάλου διασκεδασμού. Εδώ η ταχύτητα ομάδος γίνεται μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό, όταν το $c/U < 1$. Μάλιστα αυτή γίνεται και αρνητική.³ Η ταχύτητα σήματος παραμένει πάντα κάτω ή, το μέγιστο, γίνεται ίση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Η καμπύλη της ταχύτητας ομάδος και αυτή της ταχύτητας σήματος τέμνονται σε δύο σημεία, τα οποία, όπως δείχνει και η γραφική παράσταση, είναι τα μέγιστα της ταχύτητας σήματος.

Αναλογιζόμενος, ότι ο ορισμός μας της ταχύτητας σήματος είναι κάπως αυθαίρετος, μου φαίνεται καταλληλότερο αντί της λεπτής καμπύλης στο Σχήμα 2-19 να σχεδιασθεί μια ταινία, η οποία να παριστά την ταχύτητα σήματος και το εύρος της να υποδηλώνει αυτή την αυθαιρεσία μας. Το σήμα δεν αφικνείται ξαφνικά, αλλά έχουμε μια ταχεία μεν, όμως συνεχή, μετάβαση από την πολύ χαμηλή ένταση των προπομπών στην τελική του σήματος. Ένας ανιχνευτής, ο οποίος αποκρίνεται στο 1/4 της τελικής έντασης, θα δείξει την άφιξη του σήματος σε συμφωνία με τον παραπάνω αυθαίρετο ορισμό. Αν ο ανι-

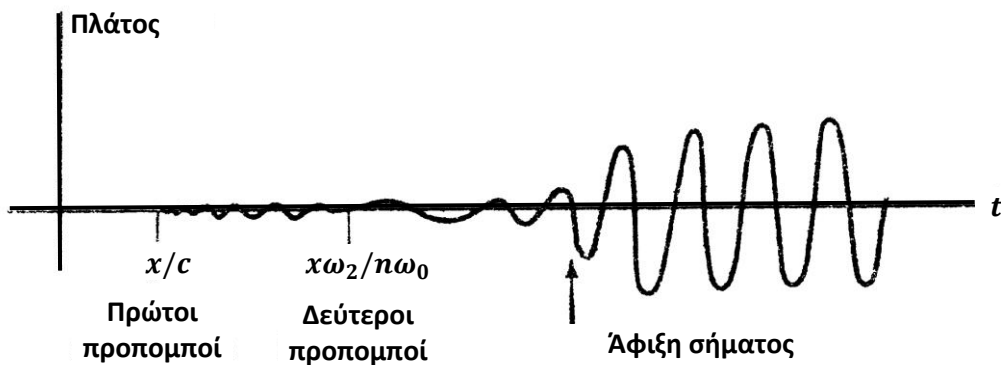
³ Βλέπε σχετικά για αυτό A. Schuster, Einführung in die theoretische Optik, Leipzig 1907. Προφανώς η ταχύτητα ομάδος έχει έννοια μόνο όσο αυτή συμπίπτει με την ταχύτητα σήματος. Τα αρνητικά μέρη της ταχύτητας ομάδος δεν καμία φυσική σημασία.

χνευτής είναι περισσότερο ή λιγότερο ευαίσθητος, θα ανιχνεύσει το σήμα είτε λίγο νωρίτερα είτε λίγο αργότερα.

3. Σύνοψη αποτελεσμάτων

Τα ευρεθέντα αποτελέσματα θα ήθελα να τα συνοψίσω ως εξής: Μελέτησα τη διάδοση ενός σήματος ειδικής μορφής σε ένα διασπείρον μέσο. Όταν το σήμα έχει διανύσει ένα ορισμένο βάθος εντός του μέσου τροποποιείται. Πρώτα αφικνούνται οι πρώτοι προπομποί με ταχύτητα c και με περίοδο αρχικά εξαιρετικά χαμηλή η οποία αυξάνει προοδευτικά, όπως και η έντασή των, και η οποία όμως ένταση, αν λάβομε υπόψη μας την εξασθένηση, μειώνεται έως ότου η περίοδος εντός του μέσου αποκτήσει τιμή ίση με την ιδιοπερίοδο των ταλαντούμενων ηλεκτρονίων στο διασπείρον μέσο. Οι δεύτεροι προπομποί φθάνουν με ταχύτητα $c(\omega_2/\omega_0) < c$ η οποία καθορίζεται από τη διηλεκτρική συνάρτηση. Η περίοδος των αρχικά είναι πολύ μεγάλη και στη συνέχεια μειώνεται, ενώ το πλάτος των συμπεριφέρεται κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν των πρώτων προπομπών. Αυτοί οι δύο προπομποί μπορούν εν μέρει να επικαλύπτονται. Το πλάτος των, εν γένει, είναι πολύ μικρό και αυξάνει πολύ γρήγορα όταν η περίοδος των πλησιάζει αυτή του σήματος. Το σήμα αφικνείται με την ταχύτητα σήματος και για κάποιο χρόνο παραμορφώνεται από τους προπομπούς, λόγω του ότι επικαλύπτεται με αυτούς. Η χρονική εξέλιξη των κινήσεων λόγω φωτός, για την περίπτωση που η περίοδος του σήματος είναι μεγαλύτερη από την ιδιοπερίοδο των ηλεκτρονίων στο διασπείρον μέσο, παριστάνεται διαγραμματικά στο Σχήμα 3-1

Θα ήθελα να προσθέσω μερικές ακόμη παρατηρήσεις σχετικά, με την εξάρτηση της εντάσεως των προπομπών με το βάθος. Για μια ταλαντωτική κίνηση η οποία χαρακτηρί-



Σχήμα 3-1

ζεται από την στιγμιαία συχνότητα εξαρτώμενη (βλέπε μετά την εξίσωση (19')) και φθάνει σε βάθος x_1 την χρονική στιγμή t_1 , σε βάθος x_2 την χρονική στιγμή t_2 θα έχουμε

$$\frac{t_1}{x_1} = \frac{t_2}{x_2} \quad \Theta_1 = \frac{t_1 c}{x_1} = \frac{t_2 c}{x_2} = \Theta_2$$

Η τιμή του ανηγμένου χρόνου Θ , η οποία είναι καθαρός αριθμός, χαρακτηρίζει τη συχνότητα ταλάντωσης ανεξάρτητα από το βάθος. Για να συγκρίνομε τις εντάσεις των προπομπών ίδιας περιόδου σε διάφορα βάθη, θα πρέπει να χρησιμοποιήσομε τις εξισώσεις (2.19) (αντίστοιχα (19')) και (2.20), οι οποίες εμπεριέχουν τα μεγέθη ξ , Θ , b ή b' . Κανείς βλέπει, ότι για μια καθορισμένη περίοδο τα πλάτη μεταβάλλονται όπως

$$\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{2}{3}\gamma\frac{b'}{c}x} \quad \text{για τον δεύτερο προπομπό}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{2}{3}\gamma\frac{b}{c}x} \quad \text{για τον πρώτο προπομπό}$$

Οι προπομποί συνεπώς υφίστανται μια ομοιόμορφη μείωση στην ένταση, η οποία είναι ανεξάρτητη από την περίοδο και αντιστρόφως ανάλογη με το x . Επιπρόσθετα υφίστανται και μια απορρόφηση η οποία αυξάνεται εκθετικά με το βάθος. Η τελευταία είναι επιλεκτική, ο συντελεστής εξαρτάται από την περίοδο, ενώ μηδενίζεται για περίοδο 0 και ∞ .

Η διεξαγωγή του παρακάτω πειράματος δεν μου φαίνεται αδύνατη. Σε ένα απορροφούν μέσο εισέρχεται ένα σήμα. Σε ένα ικανοποιητικό βάθος, δεν θα είναι παρατηρήσιμα ούτε αυτό καθ' εαυτό το σήμα ούτε εκείνοι οι προπομποί του, οι οποίοι υφίστανται απορρόφηση. Θα παρατηρούνται μόνο οι προπομποί με συχνότητα ∞ ή 0.

Ενώ σε αυτή την εργασία μελέτησα την περίπτωση ενός υλικού, το οποίο έχει μόνο μία ιδιοσυχνότητα, δηλαδή μόνο μια ταινία απορροφήσεως, ελπίζω σύντομα να μπορέσω σύντομα να το γενικεύσω και για την περίπτωση οιοδήποτε αριθμού ταινιών απορροφήσεως. Προς το παρόν μου φαίνεται πιθανόν, ότι δεν θα υπάρχουν μόνο δύο είδη προπομπών, αλλά ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ταινιών απορροφήσεως θα εμφανίζονται προπομποί με ενδιάμεσες περιόδους. Ενώ ταλαντώσεις με περιόδους 0 και ∞ είναι κάπως δύσκολο να παρατηρηθούν, προπομποί στην ορατή, ή στις γειτονικές, περιοχή είναι εύκολο να παρατηρηθούν.

§1. Παράρτημα. Η μέθοδος στάσιμης φάσεως

Έστω ότι θέλομε να μελετήσομε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int \varphi(\omega) \cos Y d\omega \quad \text{ή} \quad \int \varphi(\omega) e^{iY} d\omega$$

το οποίο εκτείνεται στον πραγματικό ω — άξονα. Το φ είναι μια παντού βραδέως μεταβαλλόμενη συνάρτηση. Εκεί που το Y μεταβάλλεται ταχέως το $\cos Y$ ή το e^{iY} μεταβάλλονται ταχύτατα και το ολοκλήρωμα πρακτικά μηδενίζεται. Επομένως, κανείς χρειά-

ζεται να διερευνήσει μόνο τη περιοχή των σημείων του πραγματικού άξονα, όπου το Y εμφανίζει μέγιστο ή ελάχιστο, δηλαδή τα σημεία του πραγματικού άξονα για τα οποία

$$\frac{dY}{d\omega} = 0$$

Το Y είναι η στάσιμη φάση σε αυτά τα σημεία. Η μέθοδος παρουσιάστηκε ήδη από τον Lamb κατά τη μελέτη των κυμάτων που δημιουργούνται από ένα πλοίο και ανάγεται στον λόρδο Kelvin.

Αν προσπαθήσει κανείς να επεκτείνει τη μέθοδο για την περίπτωση που στη θέση του καθαρά φανταστικού iY εμφανίζεται ένας εκθέτης της μορφής $X + iY$, είναι σαν να προϋποθέτει κανείς για το X μια αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση και να θεωρήσει το φe^X ως μια αργά μεταβαλλόμενη ποσότητα και συνεπώς να εφαρμόσει την παραπάνω μέθοδο. Αν όμως το X δεν είναι πλέον μια αργά μεταβαλλόμενη, και αν τα X και Y αποτελούν το πραγματικό και φανταστικό μέρος της ίδιας συναρτήσεως f , τότε αυτά θα συνδέονται μεταξύ τους από τις γνωστές σχέσεις

$$\frac{\partial X}{d\xi} = \frac{\partial Y}{d\eta}, \quad \frac{\partial X}{d\eta} = -\frac{\partial Y}{d\xi}$$

$$\omega = \xi + i\eta \quad f = X + iY$$

Αν, γενικά, το X κατά μήκος του πραγματικού άξονα μεταβάλλεται αργά, τότε αυτό θα μεταβάλλεται κάπως ταχύτερα εκεί που το φανταστικό μέρος είναι στάσιμο. Πράγματι, αν για ένα σημείο του πραγματικού άξονα είναι $\partial Y/\partial \xi = 0$, αυτό σημαίνει ότι στο μιγαδικό επίπεδο ότι μια ισοδυναμική για Y εφάπτεται του πραγματικού άξονος. Επειδή όμως, (βλέπε § 1) οι ισοδυναμικές για το Y είναι καμπύλες μέγιστης κλίσης για το X (ορθογώνιες), το $\partial X/\partial \xi$ στην ίδια θέση του πραγματικού άξονα θα είναι μεγάλο.

Στην αρχή αυτής της μελέτης έδειξα, πως παραμορφώνοντας τον δρόμο ολοκληρώσεως πάνω στο μιγαδικό ω – επίπεδο τελικά χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας μόνο την περιοχή περί το σαγματικό σημείο.

Για την περίπτωση $X = 0$ πάνω στον πραγματικό άξονα, τα σημεία στάσιμης φάσης είναι τα σαγματικά σημεία. Οπότε κανείς ουσιαστικά έχει

$$X = 0, \quad \frac{\partial X}{d\xi} = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{\partial Y}{d\eta} = 0$$

και ως συνθήκη στάσιμης φάσης $\partial Y/\partial \xi = 0$. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, η μέθοδος των σαγματικών σημείων και της στάσιμης φάσεως ταυτίζονται.

Αν το X δεν είναι μηδενικό, τότε, γενικά, ένα σημείο στάσιμης φάσης δεν είναι σαγματικό σημείο και ότι μόνο μια γραμμή μέγιστης κλίσης εφάπτεται του πραγματικού

άξονος. Αυτή η περίπτωση είναι εκτός ενδιαφέροντός μας, μιας και τα σαγματικά σημεία κείνται εκτός πραγματικού άξονος.

Ως παράδειγμα, θα δείξω, ότι, στη περίπτωση με την οποία ασχοληθήκαμε, αυτή μέθοδος οδηγεί σε αποτελέσματα τα οποία εν μέρει είναι λανθασμένα.

Είχαμε το ολοκλήρωμα

$$f(t, x) = \frac{1}{2\pi} \Re \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{-i(\omega t - kx)}}{\omega - \nu} d\omega$$

στο οποίο τώρα την ολοκλήρωση την κάνουμε πάνω στον πραγματικό άξονα. Για πραγματικό ω (βλέπε εξίσωση (2.2) και (7'))

$$k = \frac{\omega}{c} n \quad n = n_r + in_i$$

Η φάση είναι στάσιμη για

$$t - \frac{k_r}{c} x = 0 \quad \Theta - \frac{d(\omega n_r)}{d\omega} = 0$$

ή

$$\Theta - \frac{c}{U} = 0$$

όπου U η ταχύτητα ομάδος, οποία στο Σχήμα 2-19 απεικονίζεται ως συνάρτηση του ω . Στη περιοχή του ανώμαλου διασκεδασμού αυτή η καμπύλη βρίσκεται κάτω από το 1 και ακόμη κάτω από το 0. Τα σημεία στάσιμης φάσης προκύπτουν ως σημεία τομής αυτή της καμπύλης με μια ευθεία παράλληλης προς τον πραγματικό άξονα σε απόσταση Θ . Συνεπώς, θα μπορούσε κανείς να πάρει σημεία στάσιμης φάσης και για τιμές του Θ μικρότερες του 1 και μάλιστα ακόμη και για μικρότερες του 0. Η ολοκλήρωση στη γειτονιά αυτών των σημείων, θα έδινε ένα αποτέλεσμα μη μηδενικό, δηλαδή θα εύρισκε προπομπούς οι οποίοι θα διαδίδονταν με ταχύτητα μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός στο κενό, το οποίο δεν μπορεί να ισχύει.

Εν κατακλείδι, θα ήθελα να εκφράσω τις αμέριστες ευχαριστίες μου στον Dr. Prof. Sommerfeld στον οποίο οφείλω την παρότρυνση για αυτή την εργασία ως επίσης και για τις πολύτιμες συμβουλές του. Όχι λιγότερο, ευχαριστώ τον Dr. J. Fisher για την επιμελή μετάφραση της εργασίας μου.

(υποβλήθηκε 23 Φεβρουαρίου 1914)